Vol 9 No 2 Bulan Desember 2024

Jurnal Silogisme

Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya

http://journal.umpo.ac.id/index.php/silogisme

REPRESENTASI $\mathfrak{su}(2)$ DAN KOMPLEKSIFIKASI $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ PADA RUANG VEKTOR POLINOM HOMOGEN

Edi Kurniadi [1✉], Badrulfalah[2], Nurul Gusriani[3]

Info Artikel

Article History:
Received May 2024
Revised November 2024
Accepted December 2024

Keywords:
Complexification, Lie Algebra $\mathfrak{su}(N)$, representation, unitary, irreducibility

How to Cite:
Kurniadi, E., Badrulfalah, & Gusriani, N (2024) Representasi $\mathfrak{su}(2)$ dan Kompleksifikasi $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ pada Ruang Vektor Polinom Homogen. *Jurnal Silogisme: Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya, 9 (2),* halaman (87-93).

Abstrak

Aljabar Lie $\mathfrak{su}(N)$ mempunyai kompleksifikasi $\mathfrak{sl}(N,\mathbb{C})$. Dengan kata lain, $\mathfrak{su}(N)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(N,\mathbb{C})$. Dalam artikel ini, dipelajari representasi aljabar Lie $\mathfrak{su}(N)$ dan $\mathfrak{sl}(N,\mathbb{C})$ khususnya untuk $N = 2$ yang direalisasikan pada ruang vektor polinom homogen kompleks dua variabel berderajat dua. Tujuannya adalah untuk mengkonstruksi representasi $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ dari representasi $\mathfrak{su}(2)$ dan membuktikan bahwa representasi yang diperoleh bersifat unitar dan tak tereduksi. Selanjutnya, karena grup Lie dari $\mathfrak{su}(2)$ bersifat *simply connected* maka representasi $\mathfrak{su}(2)$ dapat dikonstruksi dari grup Lie-nya. Di sisi lain, karena $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ maka representasi dari $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ dapat dikonstruksi melalui perluasan linear-kompleks dari representasi $\mathfrak{su}(2)$ dan hasilnya dapat dinyatakan dalam bentuk operator linear.

Abstract

The complexification of $\mathfrak{su}(N)$ is given by $\mathfrak{sl}(N,\mathbb{C})$. In the other words, we have an isomorphic of $\mathfrak{su}(N)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(N,\mathbb{C})$. In this paper, we study representations of $\mathfrak{su}(N)$ and *$\mathfrak{sl}(N,\mathbb{C})$ for $N = 2$ which is realized on a vector space of two-variables complex of homogeneous polynomials of degree two. The research aims to contruct a representation of $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ which is obtained from a representation of $\mathfrak{su}(2)$ and to prove that the obtained representations is unitary and irreducible. Moreover, since the Lie group of $\mathfrak{su}(2)$ is simply connected then the representation of $\mathfrak{su}(2)$ can be obtained from its Lie group. On the other hand, since $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ then the representation of $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ can be constructed through complexification of linear extension of $\mathfrak{su}(2)$ representation and the results can be written in linear operators.*

✉ **Alamat korespondensi:**
Universitas Padjadjaran[1,2,3]
E-mail: edi.kurniadi@unpad.ac.id[1]

ISSN 2548-7809 (Online)
ISSN 2527-6182 (Print)

PENDAHULUAN

Konsep grup Lie sangat terkait dengan konsep manifold yang bersifat *differentiable* yang pemetaan perkalian dan inversnya keduanya bersifat *differentiable* juga (Hilgert & Neeb, 2012). Namun demikian, konsep grup Lie tersebut dapat dipelajari dalam konteks yang lebih mudah khususnya jika dikaji dalam konsep matriks atau dikenal dengan grup Lie matriks (Hall, 2015). Hal ini diakibatkan karena ruang vektor Euclid $\mathbb{R}^{N^2}$ dapat dipandang sebagai suatu manifold yang *differentiable*. Contoh-contoh grup Lie matriks antara lain himpunan semua matriks yang dapat dibalik dengan entri-entri bilangan kompleks $\mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$, himpunan semua matriks yang dapat dibalik dengan entri-entri bilangan real $\mathrm{GL}(N,\mathbb{R})$, subhimpunan $\mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$ yang determinannya sama dengan satu $\mathrm{SL}(N,\mathbb{C})$, dan subhimpunan $\mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$ yang bersifat unitar dan determinannya sama dengan satu $\mathrm{SU}(N)$ (Hall, 2015). Dalam penelitian ini dibahas terkait grup Lie matriks $\mathrm{SL}(N,\mathbb{C})$ dan $\mathrm{SU}(N)$ khususnya untuk kasus $N = 2$.

Lebih lanjut gagasan grup Lie membawa pada gagasan aljabar Lie. Jika diberikan suatu grup Lie G maka himpunan semua lapangan vektor invarian kiri yang *differentiable* (*smooth left-invariant vector fields*) dari G membentuk aljabar Lie. Notasi aljabar Lie yang diperoleh dari grup Lie G ini dinotasikan oleh $\mathfrak{g} \coloneqq \mathrm{Lie}\,(G)$. Sebagai contoh, aljabar Lie dari grup Lie $\mathrm{SL}(N,\mathbb{C})$ dinotasikan oleh $\mathfrak{sl}(N,\mathbb{C})$ yaitu himpunan semua matriks $N \times N$ yang mempunyai *trace* matriksnya sama dengan nol. Aljabar Lie $\mathfrak{su}(N)$ yang memuat semua matriks anti-Hermit dan *trace* semua matriksnya sama dengan nol merupakan aljabar Lie dari $\mathrm{SU}(N)$. Dengan demikian, diperoleh bahwa $\mathfrak{sl}(N,\mathbb{C}) \coloneqq \mathrm{Lie}(\mathrm{SL}(N,\mathbb{C}))$ dan $\mathfrak{su}(N) \coloneqq \mathrm{Lie}(\mathrm{SU}(N))$. Penelitian terkait grup Lie $\mathrm{SU}(N)$ sudah banyak dikaji para peneliti (Berndt, 2007; Pfeifer, 2003) khususnya terkait representasinya.

Di sisi lain, gagasan aljabar Lie yang berasal dari himpunan semua lapangan vektor invarian kiri yang *differentiable* dapat dipandang sebagai suatu ruang vaktor atas suatu lapangan yang dilengkapi dengan *bracket* Lie Lie. *Bracket* Lie didefinisikan sebagai pemetaan bilinear yang bersifat anti-simetrik dan memenuhi identitas Jacobi (Hall, 2015). Konsep ini lebih mudah dipahami karena banyak terkait dengan konsep aljabar seperti ruang vektor dan pemetaan bilinear dibandingkan dengan konsep lapangan vektor invarian kiri yang *differentiable*. Berdasarkan dimensinya aljabar Lie dibedakan menjadi aljabar Lie Frobenius dan aljabar Lie kontak (Salgado-González, 2019). Aljabar Lie Frobenius senantiasa berdimensi genap. Kajian terkait aljabar Lie Frobenius diperkenalkan oleh banyak peneliti (Elashvili, 1983; Ooms, 1974, 1976, 1980). Beberapa penelitian lanjutan terkait aljabar Lie Frobenius sudah banyak dikaji misalnya tentang elemen-elemen utama dan sifat-sifatnya (Diatta & Manga, 2014; Gerstenhaber & Giaquinto, 2009), invarian dan semi-invarian serta bagaimana mengkonstruksi aljabar Lie Frobenius (Ooms, 2009), dan sistem matriks-matriks komutatif terkait aljabar Lie Frobenius (Diatta et al., 2020). Selanjutnya, aljabar Lie kontak senantiasa berdimensi ganjil (Alvarez et al., 2018a). Kajian terkait aljabar Lie kontak ini misalnya tentang invariansinya (Salgado-González, 2019) dan hubungan aljabar Lie kontak dengan aljabar Lie Frobenius (Alvarez et al., 2018b). Jenis aljabar Lie lainnya adalah aljabar Lie nilpoten yaitu aljabar Lie $\mathfrak{g}$ yang memenuhi deret $\mathfrak{g}^K = \{0\}$ untuk suatu bilangan bulau K.

Aksi suatu grup pada suatu himpunan telah membawa pada ide teori representasi. Misalnya aksi grup Lie G pada aljabar Lie $\mathfrak{g} \coloneqq \mathrm{Lie}(G)$ diperkenalkan oleh ide representasi *adjoint* dan aksi grup Lie G pada dual ruang vektor $\mathfrak{g}^*$ dari aljabar Lie $\mathfrak{g} \coloneqq \mathrm{Lie}(G)$ diperkenalkan oleh ide representasi *coadjoint*. Berbeda dengan penelitian-penelitian sebelumnya, representasi dalam penelitian ini menggunakan sifat translasi fungsi. Hal ini menjadi penting karena memberikan model yang mudah dalam mempelajari representasi tingkat lanjut baik representasi grup Lie maupun representasi aljabar Lie-nya. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengkonstruksi representasi $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ pada ruang vektor polinom homogen dengan dua variabel kompleks yang berasal dari representasi $\mathfrak{su}(2)$. Representasi $\mathfrak{su}(2)$ sendiri diperoleh dari turunan representasi (*derived representation*) grup Lie $\mathrm{SU}(2)$ terhadap basis-basis standar $\mathfrak{su}(2)$ (Berndt, 2007).

Penulisan artikel ini diorganisasikan dalam empat bagian utama. Bagian pertama berupa pendahuluan membahas tentang latar belakang, *state of art* penelitian, dan signifikansi penelitian. Dalam bagian akhir pendahuluan dibahas juga mengenai landasan teori penelitian ini seperti aljabar Lie dan grup Lie serta teori representasinya. Bagian kedua membahas mengenai metode penelitian atau langkah-langkah penelitian. Bagian ketiga berupa hasil dan pembahasan. Bagian keempat adalah kesimpulan hasil penelitian.

Teori-teori yang digunakan dalam penelitian ini antara lain: aksi grup, matriks eksponensial, kompleksifikasi, teori representasi, dan representasi yang diturunkan atau *derived representations*.

Definisi 1. Himpunan semua matriks unitar dengan determinan sama dengan satu dinotasikan oleh $\mathrm{SU}(N)$ dinyatakan dalam bentuk

$$\mathrm{SU}(N) = \{U \in \mathrm{U}(N)\ ; U^* = U \quad \text{dan } |U| = 1\ \} \tag{1}$$

dan aljabar Lie dari (1) diberikan oleh himpunan semua matriks anti-Hermit yang *trace* semua matriksnya sama dengan nol dan dinotasikan sebagai berikut

$$\mathfrak{su}(2) = \{T \in \mathrm{M}(N, \mathbb{C})\ ; T^* = -T \quad \text{dan } \mathrm{trace}(T) = 0\}. \tag{2}$$

Himpunan semua matriks kompleks dengan determinan sama dengan satu dinotasikan oleh $\mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ dinyatakan dalam bentuk

$$\mathrm{SL}(N, \mathbb{C}) = \{V \in \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})\ ;\ |U| = 1\ \} \tag{3}$$

dan aljabar Lie dari (3) diberikan oleh himpunan semua matriks kompleks yang *trace* semua matriksnya sama dengan nol dan dinotasikan sebagai berikut

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{S \in \mathrm{M}(N, \mathbb{C})\ ;\ \mathrm{trace}(T) = 0\}. \tag{4}$$

Definisi 2. Misalkan $\mathfrak{g}$ ruang vektor real. Kompleksifikasi dari $\mathfrak{g}$ diberikan oleh

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \{x + iy\ ; x, y \in \mathfrak{g}\}. \tag{5}$$

Ruang vektor $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ adalah ruang vektor kompleks jika didefinisikan oleh $i(x + iy) = -y + ix$.
Hasil yang sudah diketahui secara umum dinyatakan dalam fakta-fakta sebagai berikut:

Fakta 1. *Kompleksifikasi dari aljabar Lie* $\mathfrak{su}(N)$ *adalah* $\mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$. *Dengan kata lain*, $\mathfrak{su}(N) \simeq \mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$.

Bukti. Diketahui bahwa $\mathfrak{su}(N)$ termuat di $\mathrm{M}(N, \mathbb{C})$. Misalkan $x \in \mathfrak{su}(2)$ yaitu $x^* = -x$ dan $\mathrm{trace}(x) = 0$, maka $(ix)^* = ix$. Oleh karenanya, $ix \notin \mathfrak{su}(N)$ kecuali $x \in O$. Sekarang, misalkan $S \in \mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$ sembarang. Tuliskan S dalam bentuk $S = S_1 + iS_2$ dengan $S_1 = (S - S^*)/2$ dan $S_2 = (S - S^*)/2i$ keduanya termuat di $\mathfrak{su}(N)$. Menurut Proposisi 3.38 (Hall, 2015, p. 66), $\mathfrak{su}(N) \simeq \mathfrak{sl}(N, \mathbb{C})$.

■

Definisi 3. Misalkan G grup dan V sembarang himpunan. Aksi kiri dari G pada V dinotasikan oleh $G \curvearrowright V$ adalah pemetaan $\psi_x : V \ni v \mapsto \psi_x(v) = x \cdot v \in V$ yang memenuhi kondisi-kondisi berikut ini:

1. $x_1 \cdot (x_2 \cdot v) = (x_1 x_2) \cdot v$
2. $I_d \cdot v = v$

untuk semua $x_1, x_2 \in G$ dan $v \in V$.
Konsep $G \curvearrowright V$ membawa pada konsep represntasi grup atau grup Lie atau aljabar Lie pada suatu ruang vektor atas suatu lapangan. Persisnya dinyatakan dalam definisi berikut ini:

Definisi 4(Berndt, 2007)**.** Representasi linear π dari suatu grup G pada ruang vektor V adalah homomorfisma grup yang diberikan oleh

$$\pi(g) =: \pi_g : V \ni v \mapsto \pi_g(v) \in V, \forall g \in G. \tag{6}$$

Selanjutnya π dikatakan *irreducible* jika π tidak mempunyai π-invarian subruang non-trivial $V_0 \subseteq V$. Dalam hal π dilengkapi suatu hasil kali dalam, representasi π dikatakan unitar jika memenuhi

$$\|\pi_g(v)\| = \|v\| \tag{7}$$

untuk setiap $g \in G$ dan $v \in V$.

Misalkan $A \in \mathrm{M}(N, \mathbb{C})$ yang mempunyai N buah vektor eigen yang bebas linear $x_1, x_2, \dots, x_N$ yang bersesuaikan dengan nilai-nilai eigen $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$. Maka $A = CDC^{-1}$ dan eksponensial dari A dapat dinyatakan dalam bentuk $e^A = Ce^D C^{-1}$ dengan C matriks yang dapat dibalik yang kolom-kolomya merupakan vektor-vektor eigen $x_1, x_2, \dots, x_N$ dan D adalah matriks diagonal yang diagonal utamanya nilai-nilai eigen $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ yang bersesuaian dengan vektor-vektor eigen yang disusun dalam matriks C di atas.

Definisi 5 (Berndt, 2007; p. 48)**.** Misalkan $\mathbb{P}^{(M)}$ ruang vektor dari semua polinom homogen dengan dua variabel kompleks z_1 dan z_2 berderajat $2M$ yang dibangun oleh polinom-polinom berbentuk

$$P_j(z_1, z_2) = \frac{z_1^{M+j}}{\sqrt{(M+j)!}} \frac{z_1^{M-j}}{\sqrt{(M-j)!}}, \qquad j = -M, -M+1, \dots, M. \tag{8}$$

Definisi 6. Misalkan (π, V) suatu representasi dari grup Lie matriks G. Maka representasi yang diturunkan atau *derived representation* adalah $\mathrm{d}\pi$ dari aljabar Lie $\mathfrak{g} \coloneqq \mathrm{Lie}(G)$ yang diberikan oleh persamaan:

$$\mathrm{d}\pi(X)v \coloneqq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \pi\left(e^{\theta X}\right)v|_{\theta=0}. \tag{9}$$

METODE

Metode atau langkah-langkah dalam penelitian ini dapat dijelaskan sebagai berikut. Diberikan grup Lie $\mathrm{SU}(2)$ kemudian dikonstruksi representasinya pada ruang vektor polinom homogen dengan dua variabel kompleks. Karena grup Lie $\mathrm{SU}(2)$ terhubung sederhana (*simply connected*) maka representasi $\mathfrak{su}(2)$ dapat diperoleh dari turunan representasi $\mathrm{SU}(2)$. Selanjutnya, karena kompleksifikasi dari $\mathrm{SU}(2)$ adalah $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ maka representasi $\mathfrak{su}(2)$ dapat diperluas secara linear untuk mendapatkan representasi $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Representasi $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ dinyatakan dalam bentuk ekspisit pada ruang vektor polinom homogen $\mathbb{P}^{(1)}$.

HASIL

Hasil utama dalam penelitian ini dinyatakan dalam dua buah proposisi yaitu Proposisi 1 dan Proposisi 2. Kedua Proposisi tersebut sejalan dengan hasil yang diperoleh sebelumnya (Berndt, 2007; Hall, 2015). Hasil pertama dinyatakan dalam Proposisi 1 sebagai berikut:

Proposisi 1. *Representasi aljabar Lie* $\mathfrak{su}(2) = \langle u_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i/2 \\ -i/2 & 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -i/2 & 0 \\ 0 & i/2 \end{pmatrix} \rangle$ *yang direalisasikan dalam ruang vektor* $\mathbb{P}^{(1)} = \langle P_{-1}(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_2^2,\ P_0(z_1, z_2) = z_1 z_2, P_1(z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_1^2 \rangle$ *diberikan oleh persamaan-persamaan berikut*:

$$\mathrm{d}\pi(u_1)P_{-1}(z_1, z_2) = \frac{iz_2}{2} \frac{\partial P_{-1}(z_1, z_2)}{\partial z_1} + \frac{iz_1}{2} \frac{\partial P_{-1}(z_1, z_2)}{\partial z_2} = \frac{iz_2}{2}.0 + \frac{iz_1}{2}.z_2 = \frac{iz_1 z_2}{2} = \frac{i}{2} P_0 \tag{10}$$

$$\mathrm{d}\pi(u_2)P_0(z_1, z_2) = \frac{z_2}{2} \frac{\partial P_0(z_1, z_2)}{\partial z_1} + \frac{z_1}{2} \frac{\partial P_0(z_1, z_2)}{\partial z_2} = \frac{z_2}{2}.z_2 + \frac{z_1}{2}.z_1 = \frac{z_2^2}{2} + \frac{z_1^2}{2} = P_{-1} + P_1 \tag{11}$$

$$\mathrm{d}\pi(u_3)P_1(z_1, z_2) = \frac{iz_1}{2} \frac{\partial P_1(z_1, z_2)}{\partial z_1} - \frac{iz_2}{2} \frac{\partial P_1(z_1, z_2)}{\partial z_2} = \frac{iz_1}{2}.z_1 - \frac{iz_2}{2}.0 = \frac{iz_1^2}{2} = \frac{i}{2} P_1 \tag{12}$$

dimana $\mathrm{d}\pi$ *adalah derived representation dari representasi* $\pi: \mathrm{SU}(2) \curvearrowright \mathbb{P}^{(1)}$ *terhadap basis-basis* $\mathfrak{su}(2)$. *Lebih jauh, representasi $d\pi$ bersifat unitar dan irreducible.*

Hasil kedua dinyatakan dalam Proposisi 2 sebagai berikut:

Proposisi 2. *Representasi aljabar Lie* $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \langle v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$ *yang direalisasikan dalam ruang vektor* $\mathbb{P}^{(1)} = \langle P_{-1}(z_1,z_2) = \frac{1}{2}z_2^2,\ P_0(z_1,z_2) = z_1 z_2, P_1(z_1,z_2) = \frac{1}{2}z_1^2 \rangle$ *diberikan oleh persamaan-persamaan berikut*:

$$\mathrm{d}\pi(v_1)P_{-1}(z_1,z_2) = -z_1 \frac{\partial P_{-1}(z_1,z_2)}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial P_{-1}(z_1,z_2)}{\partial z_2} = -z_2^2 = -2P_{-1} \qquad (13)$$

$$\mathrm{d}\pi(v_2)P_0(z_1,z_2) = -z_2 \frac{\partial P_0(z_1,z_2)}{\partial z_1} + 0. \frac{\partial P_0(z_1,z_2)}{\partial z_2} = -z_2^2 = -2P_{-1} \qquad (14)$$

$$\mathrm{d}\pi(v_3)P_1(z_1,z_2) = 0. \frac{\partial P_1(z_1,z_2)}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial P_1(z_1,z_2)}{\partial z_2} = 0 \qquad (15)$$

dimana $\mathrm{d}\pi$ *adalah derived representation dari representasi* $\pi: \mathrm{SU}(2) \curvearrowright \mathbb{P}^{(1)}$ *terhadap basis-basis* $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

PEMBAHASAN

Sebagaimana disebutkan di atas, bahwa representasi $\mathrm{SU}(2) \curvearrowright \mathbb{P}^{(M)}$ diberikan melalui translasi. Misalkan $g = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$ dan $P_j \in \mathbb{P}^{(M)}$, maka $\mathrm{SU}(2) \curvearrowright \mathbb{P}^{(M)}$ diberikan oleh

$$\pi_g\left(P_j(z_1,z_2)\right) = P_j\left(g^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = P_j(\bar{x}z_1 - yz_2, \bar{y}z_1 + xz_2). \qquad (16)$$

Dapat diperlihatkan bahwa π dalam (16) merupakan suatu representasi (Hall, 2015; p. 82). Dengan mengambil kasus untuk $M = 1$ dalam (8) dan menurunkan (16) menggunakan (9), diperoleh Proposisi 1 di atas. Berikut bukti lengkapnya.

Bukti Proposisi 1. Matriks eksponensial dari u_1, u_2, dan u_3 dapat dihitung dengan menggunakan formula $e^A = Ce^D C^{-1}$ di atas. Namun demikian, dengan menggunakan *derived representation* pada (10) dan dengan memisalkan $z(s) = e^{-su}z = \left(z_1(s), z_2(s)\right), z \in \mathbb{C}^2$ sebagai kurva di $\mathbb{C}^2$ diperoleh turunan parsial dari π yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\mathrm{d\pi(u)P}(z_1,z_2) = \frac{\partial P(z_1,z_2)}{\partial z_1}\frac{\mathrm{dz_1}}{\mathrm{ds}}|_{s=0} + \frac{\partial P(z_1,z_2)}{\partial z_2}\frac{\mathrm{dz_2}}{\mathrm{ds}}|_{s=0}. \qquad (17)$$

Karena turunan pertama $z(s) = e^{-su}z$ terhadap s dititik $s = 0$ maka $z'(s)_{s=0} = -uz$ maka dengan menggunakan basis-basis standar u_1, u_2, dan u_3, persamaan (17) menjadi:

$$\mathrm{d\pi(u_1)P}(z_1,z_2) = \frac{\partial P(z_1,z_2)}{\partial z_1}(-\frac{i}{2}z_2) + \frac{\partial P(z_1,z_2)}{\partial z_2}(-\frac{i}{2}z_1). \qquad (18)$$

$$\mathrm{d\pi(u_2)P}(z_1,z_2) = \frac{\partial P(z_1,z_2)}{\partial z_1}(-\frac{1}{2}z_2) + \frac{\partial P(z_1,z_2)}{\partial z_2}(\frac{1}{2}z_1). \qquad (19)$$

$$\mathrm{d\pi(u_2)P}(z_1,z_2) = \frac{\partial P(z_1,z_2)}{\partial z_1}(-\frac{i}{2}z_1) + \frac{\partial P(z_1,z_2)}{\partial z_2}(\frac{i}{2}z_2). \qquad (20)$$

Dengan substitusi polinom-polinom P_{-1}, P_0, dan P_1 ke dalam (18), (19), dan (20) berturut-turut dan dengan menghitung turunan parsialnya diperoleh hasil (10), (11), dan (12) seperti yang diinginkan. Sifat unitar dan *irreducibility*-nya telah dibuktikan oleh (Berndt, 2007; Hall, 2015).

■

Bukti Proposisi 2. Karena kompleksifikasi dari aljabar Lie $\mathfrak{su}(2)$ adalah $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ maka untuk membuktikan bagian ini, cukup diambil perluasan dari representasi $\mathfrak{su}(2)$ sebagaimana telah diperoleh dalam Proposisi 1 yaitu dalam (10), (11), dan (12). Matriks $u \in \mathfrak{su}(2)$ dapat diperluas menjadi matriks $v \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Oleh karenanya, persamaan (17) menjadi:

$$\mathrm{d}\pi(v)\mathrm{P}(z_1, z_2) = \frac{\partial P(z_1, z_2)}{\partial z_1}\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{ds}}|_{s=0} + \frac{\partial P(z_1, z_2)}{\partial z_2}\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{ds}}|_{s=0} \tag{21}$$

dengan v termuat di basis $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Substitusi matriks-matriks v_1, v_2, dan v_3 dalam (21) diperoleh hasil dalam (13), (14), dan (15).

■

Contoh 1. Misalkan $u \in \mathfrak{su}(2)$ dan $P \in \mathbb{P}^{(1)}$. Karena $u \in \mathfrak{su}(2)$ maka terdapat skalar-skalar α_1, α_2, dan α_3 sedemikian sehingga $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$. Demikian juga karena $P \in \mathbb{P}^{(1)}$ maka terdapat skalar-skalar γ_1, γ_2, dan γ_3 sedemikian sehingga $P = \gamma_1 P_{-1} + \gamma_2 P_0 + \gamma_3 P_1$. *Derived representation* $\mathrm{d}\pi(u)P(z_1, z_2)$ dapat dihitung menggunakan Persamaan (10) s.d. (12) dalam Proposisi 1 sebagai berikut:

$$\mathrm{d}\pi(u)P(z_1, z_2) = \mathrm{d}\pi(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3)[\gamma_1 P_{-1} + \gamma_2 P_0 + \gamma_3 P_1](z_1, z_2)$$
$$\mathrm{d}\pi(u)P(z_1, z_2) = \alpha_1\gamma_1 \mathrm{d}\pi(u_1)P_{-1}(z_1, z_2) + \alpha_2\gamma_2 \mathrm{d}\pi(u_2)P_0(z_1, z_2) + \alpha_3\gamma_3 \mathrm{d}\pi(u_3)P_1(z_1, z_2)$$
$$\mathrm{d}\pi(u)P(z_1, z_2) = \alpha_1\gamma_1 \mathrm{d}\pi(u_1)P_{-1}(z_1, z_2) + \alpha_2\gamma_2 \mathrm{d}\pi(u_2)P_0(z_1, z_2) + \alpha_3\gamma_3 \mathrm{d}\pi(u_3)P_1(z_1, z_2)$$
$$\mathrm{d}\pi(u)P(z_1, z_2) = \frac{\alpha_1\gamma_1}{2} iP_0 + \alpha_2\gamma_2(\mathrm{P}_{-1} + P_1) + \frac{\alpha_3\gamma_3}{2} iP_1.$$

Contoh 2. Misalkan $v \in \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ dan $P \in \mathbb{P}^{(1)}$. Karena $u \in \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ maka terdapat skalar-skalar α_1, α_2, dan α_3 sedemikian sehingga $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$. Demikian juga karena $P \in \mathbb{P}^{(1)}$ maka terdapat skalar-skalar γ_1, γ_2, dan γ_3 sedemikian sehingga $P = \gamma_1 P_{-1} + \gamma_2 P_0 + \gamma_3 P_1$. *Derived representation* $\mathrm{d}\pi(v)P(z_1, z_2)$ dapat dihitung menggunakan Persamaan (13) s.d. (15) dalam Proposisi 2 sebagai berikut:

$$\mathrm{d}\pi(v)P(z_1, z_2) = \mathrm{d}\pi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3)[\gamma_1 P_{-1} + \gamma_2 P_0 + \gamma_3 P_1](z_1, z_2)$$
$$\mathrm{d}\pi(v)P(z_1, z_2) = \alpha_1\gamma_1 \mathrm{d}\pi(v_1)P_{-1}(z_1, z_2) + \alpha_2\gamma_2 \mathrm{d}\pi(v_2)P_0(z_1, z_2) + \alpha_3\gamma_3 \mathrm{d}\pi(v_3)P_1(z_1, z_2)$$
$$\mathrm{d}\pi(v)P(z_1, z_2) = \alpha_1\gamma_1 \mathrm{d}\pi(v_1)P_{-1}(z_1, z_2) + \alpha_2\gamma_2 \mathrm{d}\pi(v_2)P_0(z_1, z_2) + \alpha_3\gamma_3 \mathrm{d}\pi(v_3)P_1(z_1, z_2)$$
$$\mathrm{d}\pi(v)P(z_1, z_2) = -2\alpha_1\gamma_1 P_{-1} - 2\alpha_2\gamma_2 P_{-1}.$$

SIMPULAN & SARAN

Kompleksifikasi dari aljabar Lie $\mathfrak{su}(2)$ adalah $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Dengan demikian, representasi dari $\mathrm{d}\pi: \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{P}^{(1)}$ dapat ditentukan dengan mengambil perluasan dari representasi $\mathrm{d}\pi: \mathfrak{su}(2) \curvearrowright \mathbb{P}^{(1)}$. Di sisi lain, karena grup Lie $\mathrm{SU}(2)$ bersifat *simply connected* maka representasi $\mathrm{d}\pi: \mathfrak{su}(2) \curvearrowright \mathbb{P}^{(1)}$ dapat diperoleh dari representasi $\pi: \mathrm{SU}(2) \curvearrowright \mathbb{P}^{(1)}$. Hasil utama dalam penelitian ini dinyatakan dalam Proposisi 1 dan 2 dan dapat dikembangkan untuk kasus $\mathrm{d}\pi: \mathfrak{su}(N) \curvearrowright \mathbb{P}^{(M)}$ maupun $\mathrm{d}\pi: \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{P}^{(M)}$.

DAFTAR RUJUKAN

Alvarez, M. A., Rodríguez-Vallarte, M. C., & Salgado, G. (2018a). Contact and Frobenius Solvable Lie Algebras with Abelian Nilradical. *Communications in Algebra*, *46*(10), 4344–4354. https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1439048

Berndt, R. (2007). *Representations of Linear Groups*. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-9401-4

Diatta, A., & Manga, B. (2014). On Properties of Principal Elements of Frobenius Lie Algebras. *Journal of Lie Theory*, *24*(3), 849–864.

Diatta, A., Manga, B., & Mbaye, A. (2020). *On systems of commuting matrices, Frobenius Lie algebras and Gerstenhaber's Theorem*. http://arxiv.org/abs/2002.08737

Elashvili, A. G. (1983). Frobenius Lie Algebras. *Functional Analysis and Its Applications*, *16*(4), 326–328. https://doi.org/10.1007/BF01077870

Gerstenhaber, M., & Giaquinto, A. (2009). The Principal Element of a Frobenius Lie Algebra. *Letters in Mathematical Physics*, *88*(1–3), 333–341.

Hall, B. C. (2015). *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations* (Vol. 222). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-13467-3

Hilgert, J., & Neeb, K.-H. (2012). *Structure and Geometry of Lie Groups*. Springer New York. https://doi.org/10.1007/978-0-387-84794-8

Ooms, A. I. (1974). On Lie Algebras Having a Primitive Universal Enveloping Algebra. *Journal of Algebra*, *32*(3), 488–500. https://doi.org/10.1016/0021-8693(74)90154-9

Ooms, A. I. (1976). On Lie Algebras with Primitive Envelopes, Supplements. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *58*(1), 67–72. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1976-0430007-6

Ooms, A. I. (1980). On Frobenius Lie Algebras. *Communications in Algebra*, *8*(1), 13–52. https://doi.org/10.1080/00927878008822445

Ooms, A. I. (2009). Computing Invariants and Semi-Invariants by Means of Frobenius Lie Algebras. *Journal of Algebra*, *321*(4), 1293–1312. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.10.026

Pfeifer, W. (2003). *The Lie Algebras su(N)*. Birkhäuser Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8097-8

Salgado-González, G. (2019). Invariants of Contact Lie Algebras. *Journal of Geometry and Physics*, *144*, 388–396. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2019.06.014