



DINAMIKA PENYEBARAN PENYAKIT KOLERA DENGAN ADANYA VAKSINASI

Tegrid Chintya Ifareyne Rauf¹, Budi Priyo Prawoto^{2✉}

Info Artikel

Article History:

Received February 2023

Revised May 2023

Accepted June 2023

Keywords:

Mathematic Modeling,
Cholera, Reinfection,
Vaccinated

How to Cite:

Rauf, T. C. I., & Prawoto, B. P. (2023) Dinamika Penyebaran Penyakit Kolera dengan Adanya Vaksinasi. *Jurnal Silogisme: Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya*, 8 (1), halaman (56-66).

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menyusun dan menganalisis model penyebaran penyakit Kolera menggunakan model *SVIRI* (*Susceptible-Vaccinated-Infected-Recovered-Infected*). Model ini memuat empat subpopulasi yaitu rentan (*S*), terinfeksi (*I*), sembuh (*R*), dan tervaksinasi (*V*). Tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah melakukan studi literatur, menyusun asumsi, menyusun model diagram kompartemen penyebaran penyakit, konstruksi sistem persamaan diferensial sebagai model, mencari titik ekuilibrium, menganalisa kestabilan titik ekuilibrium menggunakan matriks Jacobian, mencari bilangan reproduksi dengan *Next-Generation Matrices* (NGM), dan simulasi model menggunakan *Matlab* untuk sinkronisasi hasil analitik dan numerik. Dalam penelitian ini diperoleh dua titik setimbang dari model *SVIRI* penyebaran penyakit kolera, yaitu titik setimbang bebas penyakit $P_0 = (S, V, I, R) = \left(\frac{(\alpha+\mu)N}{(u+\alpha+\mu)}, \frac{uN}{(u+\alpha+\mu)}, 0, 0 \right)$ yang akan stabil ketika $u > \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu - \mu^2}{(\gamma+\mu)}$. Dan sebaliknya jika diambil nilai $u < \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu - \mu^2}{(\gamma+\mu)}$ maka titik setimbang bebas penyakit akan tidak stabil dan menjadi titik setimbang endemik $P_1 = (S^*, V^*, I^*, R^*)$.

Abstract

This study aims to formulate and analyze the Cholera disease spread model using the *SVIRI* (*Susceptible-Vaccinated-Infected-Recovered-Infected*) model. The model contains four subpopulations: susceptible (*S*), infected (*I*), recovered (*R*), and vaccinated (*V*). The steps taken in this study were to conduct literature studies, formulate assumptions, formulate model disease compartment diagrams, construct differential equation systems as models, search for equilibrium points, analyze equilibrium points stability using Jacobian matrices, search for basic reproduction number with Next-Generation Matrices. The model is then used to synchronize analytical and numerical results, and model simulations using *Matlab*. In this study result two equilibrium points of the *SVIRI* model of cholera disease spread: disease-free equilibrium point $P_0 = (S, V, I, R) = \left(\frac{(\alpha+\mu)N}{(u+\alpha+\mu)}, \frac{uN}{(u+\alpha+\mu)}, 0, 0 \right)$ which will be stable when $u > \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu - \mu^2}{(\gamma+\mu)}$. On the other hand, if is taken the value of $u < \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu - \mu^2}{(\gamma+\mu)}$, then the disease-free equilibrium point is unstable and becomes the endemic equilibrium point $P_1 = (S^*, V^*, I^*, R^*)$.

PENDAHULUAN

Kolera adalah penyakit diare akut karena infeksi usus yang disebabkan oleh bakteri *Vibrio Cholerae*. Infeksi bakteri *Vibrio Cholerae* biasanya terjadi sesudah menelan makanan atau air yang terkontaminasi oleh kotoran yang mengandung konsentrasi bakteri tinggi. Penyebaran dapat terjadi melalui dua rute, yaitu orang-feces-orang, atau infeksi langsung dari lingkungan (Ganesan, 2020). Tanpa disadari, tidak semua penderita kolera mengalami gejala setelah terinfeksi bakteri. Dari semua yang terinfeksi hanya 10% diantaranya yang menunjukkan gejala. Meskipun tidak bergejala pasien kolera dapat menularkan bakteri kepada orang lain melalui tinja mereka yang mengandung bakteri *Vibrio Cholerae* (Guntina, 2017). Kontak secara langsung dengan pasien terinfeksi kolera atau pembawa bakteri dapat meningkatkan resiko terkena penyakit kolera. Seseorang yang secara tidak sadar menjadi pembawa bakteri, lalu lupa tidak mencuci tangan dengan sabun maka orang itu dapat menginfeksi melalui jalur fecal-oral (Muzembo, 2022). Menurut *National Organization of Rare Disorders* (NORD, 2009), pada kasus kolera ringan atau tidak rumit, gejalanya mereda sendiri dalam waktu tiga sampai enam hari dan bakteri menghilang dari sistem tubuh dalam waktu dua minggu. Orang yang sudah pulih dari kolera bukan berarti mempunyai kekebalan penuh terhadap kemungkinan reinfeksi. Diperkirakan bahwa lama kekebalan berkisar antara beberapa bulan hingga tiga sampai sepuluh tahun (Cai, 2019). Vaksinasi dapat dilakukan sebagai salah satu tindakan pencegahan agar tidak terinfeksi bakteri *Vibrio Cholerae* (Guntina, 2017).

Menurut *World Health Organization* (WHO, 2022) sejak 2021, terdapat peningkatan kasus kolera dan distribusi geografisnya secara global. Pada tahun 2021, 23 negara melaporkan wabah kolera, terutama di Wilayah WHO Afrika dan Mediterania Timur. Kecenderungan ini terus berlanjut hingga 2022 dengan lebih dari 29 negara melaporkan wabah kasus kolera. Di Indonesia sendiri kolera pernah dilaporkan sebagai Kejadian Luar Biasa (KLB), yaitu pada Mei sampai Agustus 2008 di Papua yang menyebabkan 105 kasus kematian (Puspandari N. S., 2010a) dan pada Agustus 2010 Jember yang tercatat dalam kurun waktu empat minggu ada 747 kejadian kolera dengan empat kasus kematian (Puspandari N. , 2010b).

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, banyak peneliti telah berkontribusi dengan menganalisis penyebaran penyakit kolera melalui model matematika. Penelitian yang dilakukan oleh (Eustace, 2018), dalam penelitian ini digunakan model matematika penyebaran penyakit kolera model *SIRV*, dengan kasus orang sembuh bisa menjadi rentan dan *V* mewakili populasi lingkungan. Kesimpulan dari penelitian ini, yaitu peningkatan interaksi antar manusia terinfeksi dengan manusia rentan memberikan kontribusi yang signifikan dalam penyebaran infeksi kolera di lingkungan. Lalu ada (Maliki, 2021), penelitian ini menggunakan model epidemik *SIRB*, dengan adanya kasus orang yang sembuh bisa menjadi rentan jika kehilangan imunitasnya dan *B* yang mewakili populasi dari bakteri *Vibrio Cholerae*. Kesimpulan dari penelitian ini yaitu jika peningkatan pengobatan, kebersihan air, dan sanitasi lingkungan memang efektif dalam memberantas wabah kolera. Ketiga ada (Hidayati, 2021), pada penelitian ini dilakukan perhitungan untuk dua model. Model pertama tanpa kontrol dan pada model kedua digunakan kontrol vaksinasi. Hasil dari penelitian ini menyimpulkan jika tingkat kontak lebih rendah dari jumlah angka kelahiran dan tingkat pemulihan, maka penyakit kolera akan hilang seiring berjalannya waktu. Jika tingkat kontak lebih besar dari jumlah angka kelahiran dan tingkat pemulihan, maka kolera masih ada, artinya penyakit ini masih dapat menyebar. Juga dengan adanya strategi kontrol vaksinasi, bisa menurunkan populasi kelompok infeksi. Keempat ada penelitian dari (Abdul, 2022) pada penelitian ini digunakan model matematika *SVIR - B_{hi}B_{li}*, dengan kasus orang yang sudah tervaksinasi bisa menjadi rentan dan terdapat kasus tingkat penurunan efektivitas vaksin. Kesimpulan dari penelitian ini yaitu peningkatan tingkat vaksin dapat mengurangi bilangan reproduksi dasar, yang berarti dengan adanya peningkatan vaksinasi dapat mengurangi penyebaran penyakit kolera.

Dari penelitian-penelitian di atas, penulis tertarik untuk melakukan penelitian baru yang merupakan hasil modifikasi dari penelitian (Hidayati, 2021). Nantinya akan dikembangkan model deterministik *SVIRI* dengan adanya kasus terinfeksi kembali, dan penambahan kompartemen/kelompok tervaksinasi. Tujuan dari penelitian ini yaitu, untuk menyusun model deterministik *SVIRI* pada penyebaran penyakit kolera, melakukan analisa perilaku model deterministik *SVIRI* penyakit kolera, dan menentukan tingkat vaksinasi minimal sehingga jumlah orang yang terinfeksi kolera habis.

METODE

Penelitian ini adalah penelitian kualitatif dengan merujuk artikel yang dikerjakan oleh (Hidayati, 2021). Lalu dimodifikasi pengembangan penelitian mengenai penyebaran penyakit kolera model deterministik epidemik *SVIRI*. Penelitian ini dilakukan di Laboratorium Komputer Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Surabaya.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini, dimulai dengan studi literatur. Dilanjutkan dengan menyusun asumsi dan batasan yang digunakan dalam membentuk model. Setelah itu, asumsi tersebut digunakan untuk membentuk diagram kompartemen penyebaran penyakit kolera. Dari diagram kompartemen tersebut kemudian dibentuk model berupa sistem persamaan diferensial. Langkah berikutnya adalah menentukan titik ekuilibriumnya, lalu melakukan analisa kestabilan disekitar titik ekuilibrium dengan menggunakan matriks Jacobian. Dilanjutkan menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0). Tingkat minimal vaksinasi ditentukan berdasar syarat kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit. Yang terakhir melakukan simulasi numerik untuk melihat visual perilaku masing-masing subpopulasi dan juga melihat kesesuaiannya dengan hasil analisis menggunakan *Matlab*.

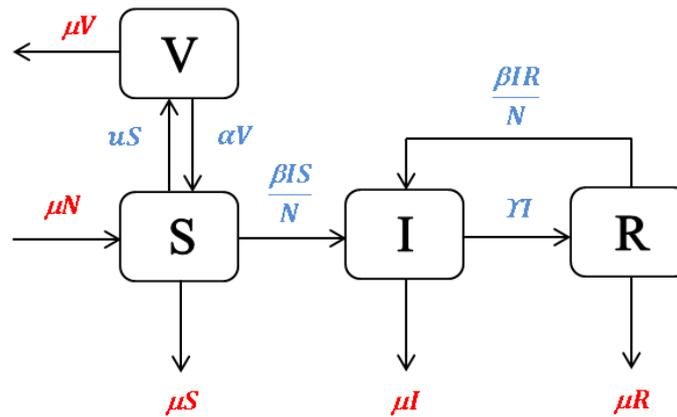
HASIL

1. Konstruksi Model

Berikut adalah asumsi-asumsi yang membentuk model penelitian ini:

- Model yang digunakan adalah model deterministik *SVIRI* dengan asumsi individu yang sembuh dapat terinfeksi kembali. Dimana S mewakili kelompok rentan (*susceptible*), I mewakili kelompok terinfeksi (*infected*), R mewakili kelompok sembuh (*recovered*), dan V mewakili kelompok yang sudah menerima vaksinasi (*vaccinated*).
- Populasi manusia konstan dan tertutup (jumlah populasinya tetap dan tidak ada migrasi yang terjadi). Dengan tingkat kelahiran sebesar μ .
- Kematian yang terjadi di setiap kelompok hanyalah kematian alami. Dengan tingkat kematian sama dengan tingkat kelahiran. Kematian akibat terinfeksi penyakit tidak diperhatikan.
- Kelompok rentan terinfeksi kolera jika berkontak langsung dengan orang terinfeksi yang tidak menjaga kebersihannya dengan tingkat penularan sebesar β . Misalnya, ada orang yang terinfeksi baru selesai buang air besar, namun ia kurang bersih saat mencuci tangan, setelah itu orang ini langsung bersalaman dengan kelompok rentan.
- Tiap individu baru yang terlahir akan rentan terhadap penyakit kolera dan memasuki kelompok rentan.
- Populasi dari kelompok terinfeksi kolera dapat sembuh secara alami dengan tingkat kesembuhan sebesar γ .
- Tingkat vaksinasi disimbolkan dalam u . Vaksin u hanya diberikan kepada individu kelompok rentan.
- Orang yang sudah divaksin bisa kembali menjadi kelompok rentan dengan tingkat kerentanan sebesar α .

Dari asumsi tersebut dapat dibentuk diagram kompartemen sebagai berikut :



Gambar 1. Model dinamika penyebaran penyakit SVIRI Koler

Berdasar asumsi dan diagram model sebelumnya dapat dibentuk sistem persamaan differensialnya:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \mu N + \alpha V - uS - \frac{\beta IS}{N} - \mu S, \\
 \frac{dV}{dt} &= uS - \alpha V - \mu V, \\
 \frac{dR}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} + \frac{\beta IR}{N} - \gamma I - \mu R, \\
 \frac{dI}{dt} &= \gamma I - \frac{\beta IR}{N} - \mu R.
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Tabel 1. Deskripsi Parameter

Parameter	Deskripsi
μ	Tingkat kelahiran dan kematian alami
γ	Tingkat kesembuhan alami
β	Tingkat penularan penyakit
u	Tingkat vaksinasi
α	Tingkat individu tervaksinasi yang menjadi rentan

2. Titik Ekuilibrium

Penyebaran penyakit kolera model SVIRI berbentuk berupa sistem persamaan differensial nonlinear. Titik ekuilibrium persamaan (1.1) diperoleh jika $\frac{dS}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$, sehingga dapat dituliskan ulang menjadi :

$$\mu N + \alpha V - uS - \frac{\beta IS}{N} - \mu S = 0. \tag{i}$$

$$uS - \alpha V - \mu V = 0. \tag{ii}$$

$$\frac{\beta IS}{N} + \frac{\beta IR}{N} - \gamma I - \mu I = 0. \tag{iii}$$

$$\gamma I - \frac{\beta IR}{N} - \mu R = 0. \tag{iv}$$

Dari model SVIRI diatas didapat dua titik ekuilibrium:

- Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah titik ekuilibrium ketika tidak ada penyakit didalam populasi. Dari persamaan (iii) didapat $I = 0$, lalu substitusikan ke persamaan (iv) sehingga diperoleh:

$$P_0 = (S, V, I, R) = \left(\frac{(\alpha + \mu)N}{(u + \alpha + \mu)}, \frac{uN}{(u + \alpha + \mu)}, 0, 0 \right). \tag{2.1}$$



- b. Titik ekuilibrium endemik adalah titik ekuilibrium saat masih ada penyebaran penyakit didalam populasi. Titik ekuilibrium endemik pada model SVIRI dapat dituliskan sebagai berikut :

$$P_1 = (S^*, V^*, I^*, R^*). \quad (2.2)$$

3. Nilai Eigen

Sebelum melakukan analisis titik ekuilibrium. Pertama-tama, akan digunakan matriks Jacobian untuk mendapatkan nilai eigen, dimana

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial S} & \frac{\partial S}{\partial V} & \frac{\partial S}{\partial I} & \frac{\partial S}{\partial R} \\ \frac{\partial V}{\partial S} & \frac{\partial V}{\partial V} & \frac{\partial V}{\partial I} & \frac{\partial V}{\partial R} \\ \frac{\partial I}{\partial S} & \frac{\partial I}{\partial V} & \frac{\partial I}{\partial I} & \frac{\partial I}{\partial R} \\ \frac{\partial R}{\partial S} & \frac{\partial R}{\partial V} & \frac{\partial R}{\partial I} & \frac{\partial R}{\partial R} \end{bmatrix}$$

Sehingga dari sistem persamaan (1.1) didapat matriks Jacobian (J):

$$J = \begin{bmatrix} -u - \frac{\beta I}{N} - \mu & \alpha & \frac{-\beta S}{N} & 0 \\ u & -\alpha - \mu & 0 & 0 \\ \frac{\beta I}{N} & 0 & \frac{\beta S}{N} + \frac{\beta R}{N} - \gamma - \mu & \frac{\beta I}{N} \\ 0 & 0 & \gamma - \frac{\beta R}{N} & \frac{-\beta I}{N} - \mu \end{bmatrix}$$

Lalu substitusi nilai titik ekuilibrium bebas penyakit (2.1) ke dalam matriks jacobian dan didapat JP_0 .

$$JP_0 = \begin{bmatrix} -u - \mu & \alpha & \frac{-\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} & 0 \\ u & -\alpha - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} - \gamma - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Jika λ adalah nilai eigen dari JP_0 . Maka dapat dituliskan $\det(\lambda I - JP_0) = 0$.

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -u - \mu & \alpha & \frac{-\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} & 0 \\ u & -\alpha - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} - \gamma - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix} = 0,$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - (-u - \mu) & -\alpha & \frac{\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} & 0 \\ -u & \lambda - (-\alpha - \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \left(\frac{\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} - \gamma - \mu \right) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & \lambda - (-\mu) \end{bmatrix} = 0.$$

Setelah itu dicari determinan dengan menggunakan metode kofaktor,

$$\det(\lambda I - JP_0) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = 0,$$

$$a_{11} = \lambda - (-u - \mu) \left\{ \lambda - (-\alpha - \mu) \left(\lambda - \left(\frac{\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} - \gamma - \mu \right) \right) (\lambda + \mu) \right\},$$

$$a_{12} = -(-\alpha) \left\{ (-u) \left(\lambda - \left(\frac{\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} - \gamma - \mu \right) \right) (\lambda + \mu) \right\},$$

$$a_{13} = \frac{\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} \{0\} = 0,$$

$$a_{21} = -(-u) \left\{ (-\alpha) \left(\lambda - \left(\frac{\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} - \gamma - \mu \right) \right) (\lambda + \mu) \right\},$$

$$a_{22} = \lambda - (-\alpha - \mu) \left\{ (\lambda - (-u - \mu)) \left(\lambda - \left(\frac{\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} - \gamma - \mu \right) \right) (\lambda + \mu) \right\},$$

$$a_{33} = \left(\lambda - \left(\frac{\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} - \gamma - \mu \right) \right) \{ (\lambda - (-u - \mu)) (\lambda - (-\alpha - \mu)) (\lambda + \mu) - ((-\alpha)(-u)) (\lambda + \mu) \},$$

$$a_{43} = -(-\gamma) \{0\} = 0,$$

$$a_{44} = (\lambda + \mu) \left\{ (\lambda - (-u - \mu)) (\lambda - (-\alpha - \mu)) \left(\lambda - \left(\frac{\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} - \gamma - \mu \right) \right) - \left((-\alpha)(-u) \left(\lambda - \left(\frac{\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} - \gamma - \mu \right) \right) \right) \right\},$$

$$\Leftrightarrow 6 \left(\lambda - \left(\frac{\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} - \gamma - \mu \right) \right) (\lambda + \mu) (\lambda^2 + 2\lambda\mu + \lambda\alpha + \alpha\mu + \mu^2 + u\lambda + u\mu) = 0.$$

Dari hasil perhitungan kofaktor didapatkan nilai akar dari persamaan karakteristik di atas

$$\left(\lambda - \left(\frac{\beta(\alpha + \mu)}{\alpha + \mu + u} - \gamma - \mu \right) \right) (\lambda + \mu) (\lambda + \mu) (\lambda + \alpha + \mu + u) = 0,$$

sehingga didapat empat nilai eigen, yaitu

$$\lambda_1 = -\frac{-\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\mu - \beta\mu + \gamma\mu + \gamma u + \mu^2 + \mu u}{\alpha + \mu + u}; \lambda_{2,3} = -\mu; \lambda_4 = -\alpha - \mu - u.$$

4. Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar digunakan untuk melihat besarnya potensi suatu penyebaran penyakit dalam populasi, juga digunakan untuk penentu kestabilan dari titik ekuilibrium model. Untuk mencari nilai R_0 digunakan metode *Next Generation Matrices* (NGM). Dimana F mewakili laju munculnya infeksi baru. Dan V mewakili laju perpindahan individu.

Misalkan $x = (I, S) \leftrightarrow (x_1, x_2)$.

$$\frac{dx}{dt} = -f(x)v(x),$$

$$= - \begin{bmatrix} \beta I(S + R) \\ N \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\gamma + \mu)I \\ -\mu N - \alpha V + uS + \frac{\beta IS}{N} + \mu S \end{bmatrix}.$$

$$\frac{dx}{dt} = -f(x_1, x_2)v(x_1, x_2),$$

$$= - \begin{bmatrix} \frac{\beta x_1(x_2 + R)}{N} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\gamma + \mu)x_1 \\ -\mu N - \alpha V + ux_2 + \frac{\beta x_1 x_2}{N} + \mu x_2 \end{bmatrix}.$$

Lalu masing-masing diturunkan terhadap x_1 dan x_2

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\beta(x_2 + R)}{N} & \frac{\beta x_1}{N} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$V = \begin{bmatrix} (-\gamma - \mu) & 0 \\ -\frac{\beta x_2}{N} & (-u - \frac{\beta x_1}{N} - \mu) \end{bmatrix},$$

$$V^{-1} = \frac{1}{(-\gamma - \mu)(-u - \frac{\beta x_1}{N} - \mu)} \begin{bmatrix} (-u - \frac{\beta x_1}{N} - \mu) & 0 \\ \frac{\beta x_2}{N} & (-\gamma - \mu) \end{bmatrix}.$$

$$G = F * V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta(x_2 + R)}{N} & \frac{\beta x_1}{N} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(-\gamma - \mu)(-u - \frac{\beta x_1}{N} - \mu)} \begin{bmatrix} (-u - \frac{\beta x_1}{N} - \mu) & 0 \\ \frac{\beta x_2}{N} & (-\gamma - \mu) \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari matriks (G) adalah,

$$\lambda_1 = \frac{\beta(NR\mu + NRu + NS\mu + NSu + R\beta I)}{N(N\gamma\mu + N\gamma u + N\mu^2 + N\mu u + \beta\gamma I + \beta I\mu)}, \lambda_2 = 0.$$

Dari dua nilai eigen di atas hanya diambil nilai $\lambda_1 = \frac{\beta(NR\mu + NRu + NS\mu + NSu + R\beta I)}{N(N\gamma\mu + N\gamma u + N\mu^2 + N\mu u + \beta\gamma I + \beta I\mu)}$ sebagai R_0 karena nilai ini adalah radius spektral atau nilai eigen yang maksimum dari *Next-Generation Matrices* dan nilainya pasti positif.

$$\text{Lalu substitusi titik bebas penyakit (2.1) dan diperoleh } R_0(P_0) = \frac{\beta(\frac{N^2(\alpha + \mu)\mu}{\alpha + \mu + u} + \frac{N^2(\alpha + \mu)u}{\alpha + \mu + u})}{N(N\gamma\mu + N\gamma u + N\mu^2 + N\mu u)}.$$

PEMBAHASAN

1. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

Berikut ini adalah kriteria jenis titik kritis dan kestabilan, menurut (Boyce, 2012).

Tabel 2. Kriteria kestabilan titik ekuilibrium

NO	Nilai Eigen	Jenis Titik Kritis	Kestabilan
1	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Simpul	Tidak stabil
2	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil asimtotik
3	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Titik sadel	Tidak stabil
4	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Simpul sejati atau tidak sejati	Tidak stabil
5	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Simpul sejati atau tidak sejati	Stabil asimtotik
	$\lambda_1, \lambda_2 = r \pm i\mu$	Titik spiral	
6	$r > 0$		Tidak stabil
7	$r < 0$		Stabil asimtotik
8	$\lambda_1 = i\mu, \lambda_2 = -i\mu$	Pusat	Stabil

Teorema 1:

Sistem (1.1) stabil di sekitar P_0 jika $u > \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu - \mu^2}{(\gamma + \mu)}$.



***Bukti :**

Dari perhitungan nilai eigen sebelumnya didapat hasil sebagai berikut

$$\lambda_1 = -\frac{-\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\mu - \beta\mu + \gamma\mu + \gamma u + \mu^2 + \mu u}{\alpha + \mu + u}; \lambda_{2,3} = -\mu; \lambda_4 = -\alpha - \mu - u,$$

karena semua parameter bernilai positif, maka $\lambda_{2,3,4}$ selalu bernilai negatif.

Agar memenuhi kriteria jenis titik stabil asimtotik dimana nilai $\lambda_i < 0$ dengan $i = 1,2,3,4$, maka nilai $\lambda_1 < 0$. Kemudian λ_1 bernilai negatif jika dipenuhi syarat $u > \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu - \mu^2}{(\gamma + \mu)}$. ■ Teorema 1 terbukti.

Teorema 2:

Sistem (1.1) stabil di sekitar P_1 jika $u < \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu - \mu^2}{(\gamma + \mu)}$.

***Bukti :**

Berdasarkan hasil perhitungan titik ekuilibrium. (1.1), diketahui jika (1.1) mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu P_0 dan P_1 . Dimana dua titik ekuilibrium tersebut tidak mungkin koeksis (muncul bersama).

Pada Teorema 1, sudah ditunjukkan bahwa titik P_0 akan dituju saat nilai $u > \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu - \mu^2}{(\gamma + \mu)}$.

Sehingga jika dipilih nilai $u < \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu - \mu^2}{(\gamma + \mu)}$, maka titik yang dituju untuk menjadi stabil yaitu titik P_1 . ■ Teorema 2 terbukti.

2. Simulasi Model

Simulasi model dilakukan untuk mendukung teorema yang diperoleh sebelumnya dan mengetahui gambar grafik penyebaran penyakit dari sistem. Simulasi model diawali dengan melakukan simulasi numerik. Simulasi numerik dilakukan untuk mencari nilai minimum dari u berdasarkan Teorema 1, dengan menggunakan nilai parameter yang ditunjukkan pada tabel di bawah ini.

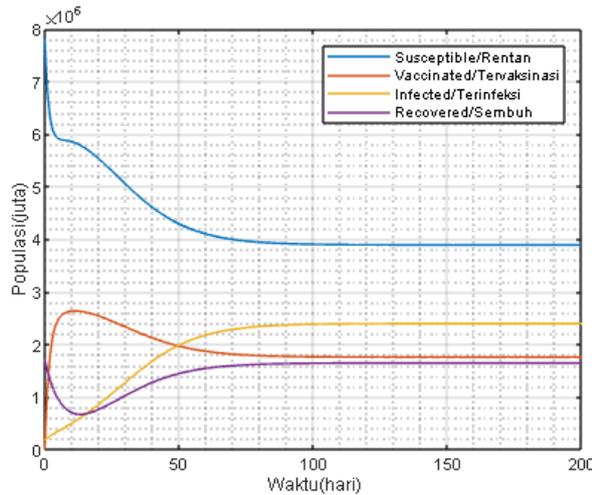
Tabel 3. Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Sumber
μ	0.14285714285	Hidayati <i>et al.</i> , (2021)
γ	0.2	Hidayati <i>et al.</i> , (2021)
β	0.6	Hidayati <i>et al.</i> , (2021)
α	0.3	diasumsikan

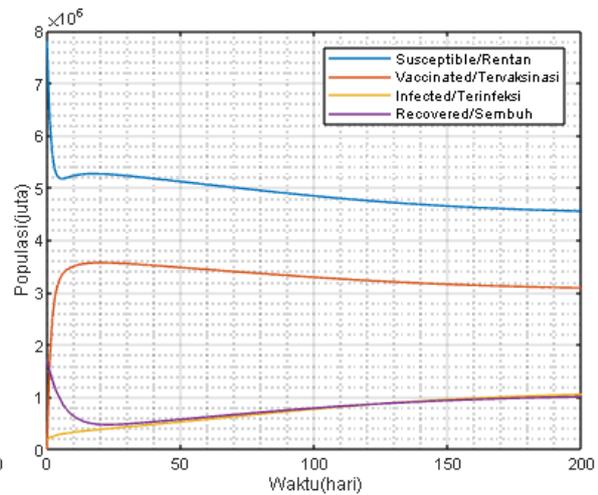
Dari hasil substitusi nilai parameter di Tabel 3 didapat nilai $u > 0.332142857$ yang memenuhi hasil analisis kestabilan titik ekuilibrium.

Berikutnya dilakukan simulasi menggunakan *Matlab*, dengan nilai awal $S = 7.800.000$, $I = 180.000$, $R = 1.700.000$, $V = 0$. Dengan $t(\text{hari}) = 200$.

Pada simulasi grafik ini akan diambil nilai $u = 0.2$, $u = 0.3$, $u = 0.4$, $u = 0.5$.

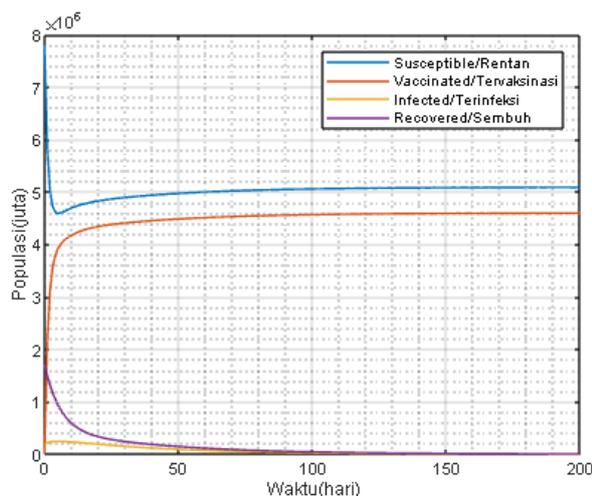


Gambar 2. Simulasi dengan $u = 0.2$

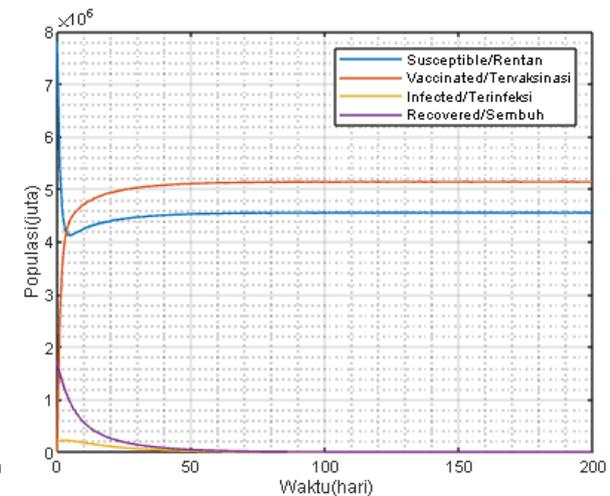


Gambar 3. Simulasi dengan $u = 0.3$

Dari Gambar 2 dan Gambar 3, masing-masing dicari nilai R_0 dengan melakukan substitusi parameter. Sehingga diperoleh $R_0 = 1.205555555$ dan $R_0 = 1.043269231$. Hal ini menunjukkan keserasian hasil R_0 yang diperoleh dengan hasil gambar grafik simulasi. Dimana saat $u < 0.332142857$, terlihat pada grafik masih terdapat kasus terinfeksi, sesuai dengan nilai $R_0 > 1$.



Gambar 4. Simulasi dengan $u = 0.4$



Gambar 5. Simulasi dengan $u = 0.5$

Dari Gambar 4 dan Gambar 5, masing-masing dicari nilai R_0 dengan melakukan substitusi parameter. Sehingga diperoleh $R_0 = 0.9194915256$ dan $R_0 = 0.8219696976$. Hal ini juga menunjukkan keserasian hasil R_0 yang diperoleh dengan hasil gambar grafik simulasi. Dimana saat $u > 0.332142857$, sudah tidak terdapat kasus terinfeksi, sesuai dengan nilai $R_0 < 1$.

3. Analisis Sensitifitas

Analisis sensitifitas digunakan untuk menentukan parameter yang secara signifikan memengaruhi nilai R_0 . Parameter yang berpengaruh menunjukkan bahwa parameter itu adalah parameter paling dominan dalam penyebaran penyakit.

$$C_{parameter}^{R_0} = \frac{\partial R_0}{\partial parameter} \times \frac{parameter}{R_0}$$

Dari rumus diatas dapat dicari nilai hasil analisis sensitifitasnya dengan substitusi nilai parameter berdasar Tabel 3 dan nilai $u = 0.4$.



Tabel 4. Hasil Analisis Sensitifitas

Parameter	Indeks Sensitifitas
β	1
α	0.3214871516
μ	-0.2635775471
u	-0.4745762717
γ	-0.5833333332

Dari Tabel 4 Hasil Analisis Sensitifitas sudah diurutkan nilai indeksinya dari yang tertinggi hingga ke yang terendah. Terdapat dua parameter dengan hasil indeks sensitifitas positif yaitu β dan α yang berarti ketika nilai parameter tersebut meningkat, maka nilai R_0 juga akan semakin tinggi. Jika nilai R_0 tinggi maka akan ada banyak penularan yang terjadi dan juga berlaku sebaliknya.

Lalu ada tiga parameter dengan hasil indeks sensitifitas negatif yaitu μ, u, γ , yang berarti dengan meningkatkan nilai parameter ini akan memengaruhi turunnya nilai R_0 atau akan semakin kecil penularan yang terjadi dan juga sebaliknya.

SIMPULAN & SARAN

Simpulan

Berdasarkan hasil kajian penyebaran penyakit kolera dengan model SVIRI adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N + \alpha V - uS - \frac{\beta IS}{N} - \mu S$$

$$\frac{dV}{dt} = uS - \alpha V - \mu V$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\beta IS}{N} + \frac{\beta IR}{N} - \gamma I - \mu I$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma I - \frac{\beta IR}{N} - \mu R$$

Dari model persamaan diatas didapat dua titik ekuilibrium, yakni ekuilibrium bebas penyakit $P_0 = (S, V, I, R) = (\frac{(\alpha+\mu)N}{(u+\alpha+\mu)}, \frac{uN}{(u+\alpha+\mu)}, 0, 0)$ dan titik ekuilibrium endemik $P_1 = (S^*, V^*, I^*, R^*)$ yang keberadaannya bergantung pada nilai R_0 dimana titik ekuilibrium endemik terjadi ketika nilai $R_0 > 1$. Tingkat vaksinasi minimal dapat ditentukan dari hasil analisis kestabilan. Dari analisis kestabilan titik ekuilibrium dapat diketahui bahwa di titik bebas penyakit mensyaratkan nilai $u > \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu - \mu^2}{(\gamma + \mu)}$, sebaliknya titik endemik mensyaratkan $u < \frac{\alpha\beta - \alpha\gamma - \alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu - \mu^2}{(\gamma + \mu)}$. Sehingga semakin besar nilai u semakin mengurangi jumlah populasi terinfeksi. Dan semakin kecil nilai u maka akan semakin memperbesar faktor penyakit menjadi endemik.

Saran

Pada penelitian ini hanya membahas penyebaran penyakit kolera model deterministik SVIRI dengan adanya kasus terinfeksi kembali, dan penambahan kompartemen/kelompok tervaksinasi. Diharapkan untuk penelitian kedepannya dapat menambahkan asumsi dan faktor-faktor lain yang dapat memengaruhi laju penyebaran penyakit kolera.

DAFTAR RUJUKAN

- Abdul, N. S. (2022). Dynamic Analysis of The Mathematical Model of The Spread of Cholera with Vaccination Strategies. *Barekeng: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 281-292.
- Boyce, W. R. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem. Ninth Ed.* United State of America: John Willey & Sons.
- Cai, L. L. (2019). Global dynamics of a Cholera model with age-of-immunity structure and reinfection. *Journal of Applied Analysis & Computation*, 9(5), 1731-1749.
- Eustace, K. O. (2018). Mathematical Modelling and Analysis of the Dynamics of Cholera. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1259-1275.

- Ganesan, D. G. (2020). Cholera surveillance and estimation of burden of cholera. *Vaccine*, 38, A13-A17.
- Guntina, R. K. (2017). Deteksi Bakteri *Vibrio Cholerae*. *Farmaka*, 15(1), 93-104.
- Hidayati, N. S. (2021). Mathematical model of cholera spread based on SIR: Optimal control. *Pythagoras: Jurnal Pendidikan Matematika*, 16 (1), 70-83.
- Maliki, O. C. (2021). A Mathematical Model for the Control of Cholera Epidemic without Natural Recovery. *Scientific Research Publishing*, 655-668.
- Muzembo, B. A. (2022). Cholera Outbreaks in India, 2011–2020: A Systematic Review. *International Journal of Environmental Research and Public Health*.
- NORD. (2009, 4). *National Organization for Rare Disorders. Cholera*. Retrieved 2009, from <https://rarediseases.org/rare-diseases/cholera/>
- Puspandari, N. S. (2010a). Identifikasi penyebab kejadian luar biasa kolera di Papua terkait kontak jenazah dan sanitasi. *Widyariset*, 13(2), 69-74.
- Puspandari, N. (2010b). Investigasi Penyebab Kejadian Luar Biasa Kolera di Jember Terkait Cemaran Sumber Air. *Jurnal Komunikasi Kesehatan*, 1(2).
- WHO. (2022, Desember 16). Retrieved Februari 28, 2023, from Cholera-Global Situation: <https://www.who.int/emergencies/disease-outbreak-news/item/2022-DON426>