Vol 6 No 1 Bulan Juni 2021

Jurnal Silogisme

Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya

http://journal.umpo.ac.id/index.php/silogisme

VERIFIKASI TINGKAT KEAKURATAN BEBERAPA METODE INTEGRASI NUMERIK FUNGSI ATAS SATU PEUBAH BEBAS

Osniman Paulina Maure[1]✉, Sudi Mungkasi[2]

Info Artikel

Article History:
Received January 2021
Revised April 2021
Accepted May 2021

Keywords:
numerical integration, order of accuracy, Riemann sums, trapezoidal rule

How to Cite:
Maure, O. P. & Mungkasi, S. (2021). Verifikasi Tingkat Keakuratan Beberapa Metode Integrasi Numerik Fungsi atas Satu Peubah Bebas. *Jurnal Silogisme: Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya, 6* (1), halaman (58-64).

Abstrak

Integrasi numerik merupakan suatu metode hampiran untuk menghitung integral tertentu. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk memverifikasi secara eksperimen tingkat keakuratan metode jumlahan Reimann kiri, metode jumlahan Reimann kanan, metode jumlahan Reimann tengah, dan metode aturan trapesium atas fungsi satu peubah bebas terhadap dua kasus. Kasus pertama yaitu integrasi atas fungsi naik; dan kasus kedua yaitu integrasi atas fungsi bersifat naik pada suatu interval yang diikuti sifat turun pada interval yang lain. Dalam memverifikasi keakuratannya, digunakan langkah domain diskrit yang bervariasi, kemudian dihitung tingkat keakuratan eksperimental dari keempat metode integrasi tersebut. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa pada kasus pertama, jumlahan Reimann kiri dan jumlahan Reimann kanan memiliki tingkat keakuratan eksperimental masing-masing mendekati 1, sedangkan tingkat keakuratan eksperimental jumlahan Reimann tengah dan metode aturan trapesium adalah masing-masing mendekati 2; hasil-hasil ini sesuai dengan tingkat keakuratan formal dari keempat metode tersebut. Pada kasus kedua, keempat metode integrasi numerik memiliki tingkat keakuratan eksperimental yang sama-sama mendekati 2; hasil-hasil ini ini menunjukkan bahwa untuk kasus tertentu diperoleh bahwa tingkat keakuratan eksperimental metode integrasi numerik bisa lebih besar dari tingkat keakuratan formalnya.

Abstract

Numerical integration is an approximation method for computing definite integrals. The objective of this research is to verify experimentally the orders of accuracy of the left Riemann sum method, the right Riemann sum method, the middle Riemann sum method, and the trapezoidal rule method for integrations of functions of one independent variable for two cases. The first case is the integration of an increasing function; and the second case is the integration of a function increasing on an interval, but decreasing on the other remaining interval. In verifying the accuracy, we use variations of discrete domain steps, then compute the experimental orders of accuracy of the integration methods. The results of this study indicate that for the first case, both the experimental orders of accuracy of the left Riemann sum and the right Riemann sum methods approach 1, whereas the experimental orders of accuracy of the middle Reimann sum and the trapezoidal rule methods tend to 2; these results match with the formal orders of accuracy of the four considered methods. For the second case, all the four numerical integration methods have the experimental orders of accuracy approaching 2; these results show that for a certain case the experimental orders of accuracy of numerical integration methods may be higher than their formal orders of accuracy.

✉ **Alamat korespondensi:**
Universitas San Pedro, Kupang[1]
Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta[2]
E-mail: osnimanpaulinamaure@gmail.com[1]

ISSN 2548-7809 (Online)
ISSN 2527-6182 (Print)

PENDAHULUAN

Metode numerik merupakan suatu teknik hampiran penyelesaian dari suatu masalah matematika yang sulit atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik (Darmawan, 2016). Metode numerik menghasilkan penyelesaian hampiran yang tidak persis sama dengan penyelesaian sebenarnya, namun tingkat keakuratannya dapat dilihat dari error yang sekecil mungkin (Ermawati, dkk., 2017). Secara umum perhitungan pada metode numerik dilakukan dengan iterasi yang bertujuan untuk menghasilkan ketelitian yang akurat.

Metode numerik yang digunakan untuk memecahkan masalah berkaitan dengan integral adalah integrasi numerik. Ada banyak integral tertentu yang sulit bahkan tidak dapat ditemukan penyelesaian analitiknya sehingga diperlukan integrasi numerik (Ullah, 2015). Integrasi numerik memiliki banyak aplikasi di bidang matematika terapan, terutama dalam bidang fisika matematika dan kimia komputasi (Bailey and Borwein, 2011; Zhao and Zhang, 2014).

Beberapa peneliti (Aigo, 2013; Li and Yu, 2013; Grier, dkk., 2014; Maure and Mungkasi, 2019) telah menerapkan metode dalam integrasi numerik untuk menemukan hampiran penyelesaian dari suatu model matematika. Ada beberapa metode dalam integrasi numerik yaitu jumlahan Riemann, metode aturan trapesium, metode Simpson 1/3, dan metode Simpson 3/8 (Mettle, dkk., 2016). Berdasarkan hasil penelitian Moheuddin, dkk., (2020), metode Simpson 1/3 memberikan penyelesaian yang akurat dibandingkan dengan metode aturan trapesium dan Simpson 3/8 karena konvergensinya lebih cepat. Uddin, dkk (2019) mempresentasikan konsepsi lengkap tentang integrasi numerik termasuk rumus Newton-Cotes dan membandingkan tingkat keakuratan metode aturan trapesium, Simpson 1/3, dan Simpson 3/8. Hasil penelitian ini juga menunjukkan bahwa metode Simpson 1/3 memberikan penyelesaian yang lebih efektif dan akurat. Hasil-hasil tersebut sudah tersedia dalam literatur.

Dengan demikian, sebagai komplemen ilmu pengetahuan yang sudah ada dalam literatur, makalah ini akan membandingkan keakuratan beberapa integrasi numerik. Penelitian dibatasi pada empat jenis metode integrasi numerik yaitu metode jumlahan Riemann kiri, metode jumlahan Riemann kanan, metode jumlahan Riemann tengah, dan metode aturan trapesium atas fungsi satu peubah bebas terhadap dua kasus. Kasus pertama adalah integrasi atas suatu fungsi naik dan kasus kedua adalah integrasi atas suatu fungsi bersifat naik pada suatu interval yang diikuti sifat turun pada interval yang lain.

Ada dua jenis tingkat keakuratan metode integrasi numerik, yaitu tingkat keakuratan formal dan tingkat keakuratan eksperimental. Perlu diingat bahwa tingkat keakuratan formal untuk metode jumlahan Riemann kiri dan metode jumlahan Riemann kanan adalah masing-masing bernilai 1, sedangkan tingkat keakuratan formal untuk metode jumlahan Riemann tengah dan metode aturan trapesium adalah masing-masing bernilai 2. Makalah ini menyajikan perbandingan tingkat keakuratan eksperimental metode jumlahan Riemann kiri, metode jumlahan Riemann kanan, metode jumlahan Riemann tengah, dan metode aturan trapesium terhadap dua kasus untuk memverifikasi tingkat keakuratan formal masing-masing metode tersebut.

METODE

Dipandang integral tertentu berikut

$$I = \int_a^b f(x)\, dx, \tag{1}$$

dengan $f(x)$ adalah fungsi yang kontinu pada interval $[a, b]$. Berikut ini akan dituliskan secara singkat rumusan metode jumlahan Reimann kiri, metode jumlahan Reimann kanan, metode jumlahan Reimann tengah, dan metode aturan trapesium untuk menghitung hampiran nilai integral pada persamaan (1).

Metode Jumlahan Riemann: Kiri, Kanan, dan Tengah

Metode jumlahan Riemann merupakan pengembangan integral tertentu yang disusun dari suatu konsep limit pada jumlahan Riemann atas suatu fungsi. Definisi dari integral tertentu pada persamaan (1) dinyatakan seperti berikut ini (Stewart, 2016):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x.$$

Dengan demikian, sebarang jumlahan Riemann dapat dipakai sebagai suatu hampiran untuk integral. Jika dibagi $[a,b]$ atas n selang bagian dengan panjang $\Delta x = (b-a)/n$, untuk suatu bilangan asli n, maka diperoleh (Stewart, 2016):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x,$$

dengan x_i^* sebarang titik di selang bagian ke-i, yaitu $[x_{i-1}, x_i]$. Jika dipilih x_i^* sebagai titik ujung kiri selang sehingga $x_i^* = x_{i-1}$, maka akan diperoleh (Stewart, 2016):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x. \tag{2}$$

Persamaan (2) ini disebut sebagai jumlahan Riemann kiri. Jika dipilih x_i^* sebagai titik ujung kanan sehingga $x_i^* = x_i$, maka akan diperoleh

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x. \tag{3}$$

Persamaan (3) ini disebut dengan jumlahan Riemann kanan. Jika dipilih x_i^* sebagai titik tengah $\bar{x}_i$ dari selang bagian $[x_{i-1}, x_i]$, maka akan diperoleh

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x, \tag{4}$$

dengan $\Delta x = (b-a)/n$ dan $\bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ titik tengah $[x_{i-1}, x_i]$. Persamaan (4) ini disebut dengan jumlahan Riemann tengah.

Metode Aturan Trapesium

Metode aturan trapesium merupakan pengembangan dari metode jumlahan Riemann, dimana integral tertentu dari suatu fungsi $f(x)$ dihampiri dengan rumus luas trapesium. Pada metode aturan trapesium ini, kurva $f(x)$ dipartisi menjadi $n+1$ titik (Maure, 2019). Rumus umum untuk metode aturan trapesium adalah sebagai berikut (Stewart, 2016):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_n\right), \tag{5}$$

dengan $\Delta x = (b-a)/n$ dan $x_i = a + i\Delta x$, dimana $i = 0,1,2,\dots,n$ serta $f_i = f(x_i)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Ada dua jenis tingkat keakuratan metode integrasi numerik, yaitu tingkat keakuratan formal dan tingkat keakuratan eksperimental. Bagian ini memuat hasil yang membandingkan tingkat keakuratan eksperimental metode jumlahan Riemann kiri, metode jumlahan Riemann kanan, metode jumlahan Riemann tengah, dan metode aturan trapesium untuk dua kasus. Kasus pertama untuk inegrasi atas fungsi $f(x)$ naik, sedangkan kasus kedua untuk integrasi atas fungsi $f(x)$ bersifat naik pada suatu interval tertentu yang diikuti sifat turun pada interval yang lain. Sebagai catatan, tingkat keakuratan formal untuk metode jumlahan Riemann kiri dan metode jumlahan Riemann kanan adalah masing-

masing bernilai 1, sedangkan tingkat keakuratan formal untuk metode jumlahan Riemann tengah dan metode aturan trapesium adalah masing-masing bernilai 2.

Sebagai uji kasus, dipandang fungsi $f(x) = e^{-x^3}x$ dimana fungsi ini sulit dihitung nilai eksak integral tertentunya. Makalah ini menggunakan langkah integrasi domain diskrit yang bervariasi, yaitu $\Delta x = 0.2$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta x = 0.05$, $\Delta x = 0.025$, dan $\Delta x = 0.0125$. Tingkat keakuratan eksperimental setiap metode integrasi numerik ini dihitung dengan menggunakan rumus sebagai berikut (Hidayat, dkk., 2014):

$$R_i = \frac{\log\left(\frac{E_i}{E_{i+1}}\right)}{\log\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i+1}}\right)} \tag{6}$$

dengan E_i adalah error metode integrasi numerik pada saat diskritisasi domainnya menggunakan langkah diskrit Δx_i.

Kasus Pertama: Fungsi Naik

Uji kasus pertama, fungsi $f(x) = e^{-x^3}x$ diintegralkan dalam interval tertutup $[0, 0.2]$:

$$I = \int_0^{0.2} e^{-x^3} x\, dx. \tag{7}$$

Nilai eksak dari persamaan (7) di atas telah dihitung menggunakan perangkat lunak MATLAB dan diperoleh nilai integral tertentunya yaitu sebagai berikut

$$\int_0^{0.2} e^{-x^3} x\, dx = 0.019936159690184. \tag{8}$$

Nilai eksak nilai integral numerik, error mutlak, dan tingkat keakuratan eksperimental masing-masing metode disajikan dalam Tabel 1 sampai dengan Tabel 4.

Berdasarkan Tabel 1 sampai Tabel 4 pada kasus pertama ini, tingkat keakuratan eksperimental metode jumlahan Reimann kiri dan metode jumlahan Reimann kanan adalah masing-masing mendekati 1, sedangkan tingkat keakuratan eksperimental metode jumlahan Reimann tengah dan metode aturan trapesium adalah masing-masing mendekati 2. Perlu dicatat bahwa dalam menghitung tingkat keakuratan eksperimental terakhir pada masing-masing Tabel 1 sampai dengan Tabel 4, diperlukan perhitungan integral dan errornya untuk langkah $\Delta x = 0.00625$.

Kasus Kedua: Fungsi Naik, lalu Fungsi Turun

Uji kasus kedua, fungsi $f(x) = e^{-x^3}x$ diintegralkan dalam interval tertutup $[0, 10]$:

$$I = \int_0^{10} e^{-x^3} x\, dx. \tag{9}$$

Nilai eksak dari persamaan (9) di atas telah dihitung menggunakan perangkat lunak MATLAB dan diperoleh nilai integral tertentunya yaitu sebagai berikut

$$\int_0^{10} e^{-x^3} x\, dx = 0.451372646475467. \tag{10}$$

Nilai eksak nilai integral numerik, error mutlak, dan tingkat keakuratan eksperimental masing-masing metode disajikan dalam Tabel 5 sampai dengan Tabel 8.

Berdasarkan Tabel 5 sampai Tabel 8 pada kasus kedua di atas, tingkat keakuratan eksperimental jumlahan Reimann kiri, jumlahan Reimann kanan, jumlahan Reimann tengah, dan metode aturan trapesium adalah sama yaitu tingkat keakuratan eksperimental mendekati 2. Hal ini dikarenakan fungsi $f(x) = e^{-x^3}x$ memuat perubahan sifat dari sebelumnya fungsi naik pada $[0 < x < 0.6934]$, kemudian bersifat turun pada $[0.6934, \infty)$. Hal ini terlihat pada Gambar 1.

Perlu dicatat bahwa dalam menghitung tingkat keakuratan eksperimental terakhir pada masing-masing Tabel 5 sampai dengan Tabel 8, diperlukan perhitungan integral dan errornya untuk langkah $\Delta x = 0.00625$.

Tabel 1. Tingkat keakuratan eksperimental kasus pertama jumlahan Riemann kiri

Δx	**Integral Eksak**	**Integral Numerik**	**Error Mutlak**	**Tingkat Keakuratan**
0.2000	0.019936159	0.000000000	0.019936159690	1.003176755
0.1000	0.019936159	0.009990005	0.009946154691	1.001839787
0.0500	0.019936159	0.014969420	0.004966739504	1.000951569
0.0250	0.019936159	0.017454427	0.002481732317	1.000479861
0.0125	0.019936159	0.018695706	0.001240453497	1.000240470

Tabel 2. Tingkat keakuratan eksperimental kasus pertama jumlahan Riemann kanan

Δx	**Integral Eksak**	**Integral Numerik**	**Error Mutlak**	**Tingkat Keakuratan**
0.2000	0.019936159	0.039681277	0.019745116903	0.996799590
0.1000	0.019936159	0.029830643	0.009894483605	0.998152967
0.0500	0.019936159	0.024889739	0.004953579644	0.999046532
0.0250	0.019936159	0.022414587	0.002478427257	0.999519659
0.0125	0.019936159	0.021175786	0.001239626290	0.999759409

Tabel 3. Tingkat keakuratan eksperimental kasus pertama jumlahan Riemann tengah

Δx	**Integral Eksak**	**Integral Numerik**	**Error Mutlak**	**Tingkat Keakuratan**
0.2000	0.019936159	0.019980010	0.000043850306	1.790523493
0.1000	0.019936159	0.019948835	0.000012675683	1.952553756
0.0500	0.019936159	0.019939434	0.000003274870	1.988408481
0.0250	0.019936159	0.019936985	0.000000825322	1.997118489
0.0125	0.019936159	0.019936366	0.000000206743	1.999280638

Tabel 4. Tingkat keakuratan eksperimental kasus pertama metode aturan trapesium

Δx	**Integral Eksak**	**Integral Numerik**	**Error Mutlak**	**Tingkat Keakuratan**
0.2000	0.019936159	0.019840638	0.000095521393	1.886466649
0.1000	0.019936159	0.019910324	0.000025835543	1.973212988
0.0500	0.019936159	0.019929579	0.000006579930	1.993395802
0.0250	0.019936159	0.019934507	0.000001652530	1.998354631
0.0125	0.019936159	0.019935746	0.000000413603	1.999589010

Tabel 5. Tingkat keakuratan eksperimental kasus kedua jumlahan Riemann kiri

Δx	**Integral Eksak**	**Integral Numerik**	**Error Mutlak**	**Tingkat Keakuratan**
0.2000	0.451372646	0.448039318	0.00333332800	1.999997728
0.1000	0.451372646	0.450539313	0.00083333331	1.999999964
0.0500	0.451372646	0.451164313	0.00020833333	1.999999999
0.0250	0.451372646	0.451320563	0.00005208333	2
0.0125	0.451372646	0.451359625	0.00001302083	2

Tabel 6. Tingkat keakuratan eksperimental kasus kedua jumlahan Riemann kanan

Δx	**Integral Eksak**	**Integral Numerik**	**Error Mutlak**	**Tingkat Keakuratan**
0.2000	0.451372646	0.448039318	0.003333328001	1.999997728
0.1000	0.451372646	0.450539313	0.000833333313	1.999999964

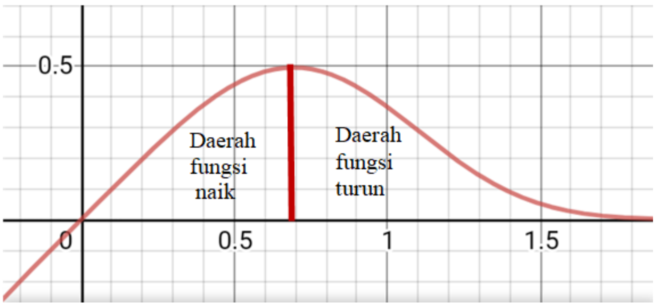
0.0500	0.451372646	0.451164313	0.000208333333	1.999999999
0.0250	0.451372646	0.451320563	0.000052083333	2
0.0125	0.451372646	0.451359626	0.000013020833	2

Tabel 7. Tingkat keakuratan eksperimental kasus kedua jumlahan Riemann tengah

Δx	**Integral Eksak**	**Integral Numerik**	**Error Mutlak**	**Tingkat Keakuratan**
0.2000	0.451372646	0.453039308	0.001666661375	1.999995491
0.1000	0.451372646	0.451789313	0.000416666646	1.999999930
0.0500	0.451372646	0.451476813	0.000104166666	1.999999999
0.0250	0.451372646	0.451398688	0.000026041666	2
0.0125	0.451372646	0.451379156	0.000006510416	2

Tabel 8. Tingkat keakuratan eksperimental kasus kedua metode aturan trapesium

Δx	**Integral Eksak**	**Integral Numerik**	**Error Mutlak**	**Tingkat Keakuratan**
0.2000	0.451372646	0.4480393185	0.003333328000	1.999997728
0.1000	0.451372646	0.4505393131	0.000833333312	1.999999964
0.0500	0.451372646	0.4511643131	0.000208333333	1.999999999
0.0250	0.451372646	0.4513205631	0.000052083333	2
0.0125	0.451372646	0.4513596256	0.000013020833	2



Gambar 1. Daerah fungsi naik dan fungsi turun dari $f(x) = e^{-x^3}x$.

SIMPULAN & SARAN

Berikut ini disampaikan simpulan penelitian serta saran untuk penelitian lanjutan terkait integrasi numerik dan tingkat keakuratannya.

Simpulan

Pada kasus fungsi yang tidak mengalami berubahan sifat, misalnya hanya bersifat naik saja dalam suatu interval, metode jumlahan Reimann kiri dan metode jumlahan Reimann kanan memiliki tingkat keakuratan eksperimental yang masing-masing mendekati 1, sedangkan tingkat keakuratan eksperimental metode jumlahan Reimann tengah dan metode aturan trapesium adalah masing-masing mendekati 2; hal ini sesuai dengan tingkat keakuratan formalnya. Pada kasus fungsi yang mengalami perubahan sifat, misalnya bersifat naik pada suatu subinterval yang diikuti sifat turun pada subinterval yang lain, keempat metode integrasi numerik tersebut bisa memiliki tingkat keakuratan eksperimental yang sama yaitu mendekati 2. Dengan demikian, disimpulkan bahwa untuk kasus-kasus dalam penelitian ini, tingkat keakuratan ekperimental metode integrasi numerik bisa lebih tinggi daripada tingkat keakuratan formalnya.

Saran

Saran untuk penelitian lanjutan adalah sebagai berikut. Salah satu penelitian lanjutan dapat membandingkan tingkat keakuratan eksperimental metode-metode integrasi numerik lainnya untuk berbagai kasus. Selain itu, penelitian lanjutan dapat pula memverifikasi tingkat keakuratan berbagai metode integrasi numerik untuk fungsi atas peubah banyak.

DAFTAR RUJUKAN

Aigo, M. (2013). On the Numerical Approximation of Volterra Integral Equations of Second Kind Using Quadrature Rules. *International Journal of Advanced Scientific and Technical Research*, *1*(3), 558–564.

Bailey, D. H., & Borwein, J. M. (2011). High-Precision Numerical Integration: Progress and Challenges. *Journal of Symbolic Computation*, *46*(7), 741–754.

Darmawan, R. N. (2016). Perbandingan Metode Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto dan Gauss- Kronrod pada Integrasi Numerik Fungsi Eksponensial. *Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, *1*(2), 99–108.

Ermawati, Rahayu, P., & Zuhairoh, F. (2017). Perbandingan Solusi Numerik Integral Lipat Dua pada Fungsi Aljabar dengan Metode Romberg dan Simulasi Monte Carlo. *Jurnal Matematika Dan Statistika Serta Aplikasinya (MSA)*, *5*(2), 14–22.

Grier, B., Alyanak, E., White, M., Camberos, J., & Figliola, R. (2014). Numerical Integration Techniques for Discontinuous Manufactured Solutions. *Journal of Computational Physics*, *278*(1), 193–203.

Hidayat, N., Suhariningsih, Suryanto, A., & Mungkasi, S. (2014). The Significance of Spatial Reconstruction in Finite Volume Methods for the Shallow Water Equations. *Applied Mathematical Sciences*, *8*(29), 1411–1420.

Li, J., & Yu, D. H. (2013). Error Expansion of Classical Trapezoidal Rule for Computing Cauchy Principal Value Integral. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, *93*(1), 47–67.

Maure, O. P. (2019). *Aspek Matematis dan Aspek Pendidikan pada Suatu Model Pemurnian Air dalam Sistem Osmosis Terbalik* (Tesis). Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta.

Maure, O. P., & Mungkasi, S. (2019). Application of Numerical Integration in Solving a Reverse Osmosis Model. *AIP Conference Proceedings*, *2202*(1), 1–6.

Mettle, F. O., Quaye, E. N. B., Asiedu, L., & Darkwah, K. A. (2016). A Proposed Method for Numerical Integration. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, *17*(1), 1–15.

Moheuddin, M. M., Titu, M. A. S., & Hossain, S. (2020). A New Analysis of Approximate Solutions for Numerical Integration Problems with Quadrature-Based Methods. *Pure and Applied Mathematics Journal*, *9*(3), 46–54.

Stewart, J. (2016). *Calculus, Eight Edition*. Boston: Cengage Learning.

Uddin, M. J., Moheuddin, M. M., & Kowsher, M. (2019). A New Study of Trapezoidal, Simpson's 1/3 and Simpson's 3/8 Rules of Numerical Integral Problems. *Applied Mathematics and Sciences: An International Journal (MathSJ)*, *6*(4), 1–14.

Ullah, M. A. (2015). Numerical Integration and a Proposed Rule. *American Journal of Engineering Research (AJER)*, *4*(9), 120–123.

Zhao, W., & Zhang, Z. (2014). Derivative-Based Trapezoid Rule for the Riemann-Stieltjes Integral. *Mathematical Problems in Engineering*, *2014*(3), 1–6.