Vol 3 No 2 Bulan Desember 2018

Jurnal Silogisme

Kajian Ilmu Matematika dan Pembelajarannya

http://journal.umpo.ac.id/index.php/silogisme

SIFAT KELENGKAPAN DAN KEKOMPAKAN PADA RUANG METRIK HAUSDORFF

Dewanti Inesia Putri[1], Arta Ekayanti[2]✉

Info Artikel

Article History:
Accepted October 2018
Approved November 2018
Published December 2018

Keywords:
Metric Space, Hausdorff, Completeness, Compactness.

How to Cite:
Dewanti Inesia Putri, Arta Ekayanti (2018). Sifat Kelengkapan dan Kekompakan pada Ruang Metrik Hausdorff : Jurnal Silogisme Universitas Muhammadiyah Ponorogo, Vol 3 No 2: 78-87

Abstrak

Pada tulisan ini, akan dibahas mengenai pengertian ruang metrik Hausdorff, sifat kelengkapan ruang metrik Hausdorff, dan sifat kekompakan ruang metrik Hausdorff. Dengan memanfaatkan konsep ruang metrik, himpunan kompak diberikan definisi ruang metrik Hausdorff. Dengan menggunakan sifat kelengkapan ruang metrik, ditunjukkan bahwa ruang metrik Hausdorff lengkap jika ruang metriknya lengkap. Lebih lanjut, dengan menggunakan sifat kekompakan ruang metrik ditunjukkan ruang metrik Hausdorff kompak jika ruang metriknya kompak.

Abstract

In this paper, will be discuss the definition of the Hausdorff metric space, completeness of the Hausdorff metric space, and compactness of the Hausdorff metric space. By used the theory of the metric space, the compact set was given the definition of the Hausdorff metric space. By used the completeness of the metric space, it is shown that the Hausdorff metric space was complete if the metric space was complete. Furthermore, used the compactness of the metric space was shown the Hausdorff metric space was compact if the metric space was compact

✉ **Alamat korespondensi:**
Universitas Muhammadiyah Ponorogo[1,2]
E-mail: arta_ekayanti@ymail.com[2]

ISSN 2548-7809 (Online)
ISSN 2527-6182 (Print)

PENDAHULUAN

Ruang metrik merupakan salah satu topik pembahasan penting pada analisis. Pada tahun 1906 konsep ruang metrik pertama kali diperkenalkan oleh Maurice René Fréchet (1878-1973), seorang ilmuwan matematika dari Perancis. Ruang metrik merupakan pasangan berurut suatu himpunan dengan suatu metrik. Metrik merupakan perumuman dari konsep jarak dengan aturan-aturan tertentu. Bentuk ruang metrik secara umum biasanya dinotasikan dengan (X, d) atau cukup ditulis X saja. Konsep metrik pada umumnya menentukan jarak dari titik ke titik, namun seorang matematikawan asal Jerman, Felix Hausdorff (1868-1942) melakukan pengembangan dengan ruang metrik. Felix Hausdorff menemukan suatu metode untuk menghitung jarak antara dua himpunan pada ruang metrik, yang kemudian dikenal dengan jarak Hausdorff. Dengan konsep yang sama seperti ruang metrik, jarak hausdorff kemudian dikembangkan menjadi ruang metrik Hausdorff. Pada ruang metrik Hausdorff juga berlaku sifat seperti halnya ruang metrik secara umum.

METODE

Penelitian ini dimulai dengan membahas ruang metrik, dimana didalamnya membahas mengenai himpunan kompak, sifat kelengkapan ruang metrik dan sifat kekompakan ruang metrik. Selanjutnya himpunan kompak dalam ruang metrik akan digunakan untuk membahas definisi jarak dari titik ke himpunan, jarak antara himpunan-himpunan, dan metrik Hausdorff. Lebih lanjut, metrik Hausdorff digunakan untuk membahas definisi dari ruang metrik. Dengan memanfaatkan beberapa teori tersebut selanjutnya akan digunakan untuk membuktikan beberapa teorema terkait dengan sifat kelengkapan dan sifat kekompakan ruang metrik Hausdorff.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dibawah ini akan dijelaskan teorema mengenai dua barisan pada ruang metrik yang konvergen ke suatu titik yang berbeda maka jarak dari anggota tiap barisan akan konvergen ke jarak dari titik limit masing-masing barisan.

Teorema 1.

Diberikan barisan (x_n) dan (y_n) pada ruang metrik (X, d). Jika (x_n) konvergen ke x dan (y_n) konvergen ke y, maka $\left(d(x_n, y_n)\right)$ konvergen ke $d(x, y)$.

Bukti:

Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena (x_n) konvergen ke x, maka terdapat bilangan asli N_1 sehingga $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N_1$. Selanjutnya karena (y_n) konvergen ke y, maka terdapat bilangan asli N_2 sehingga $d(y_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq N_2$. Kemudian ambil $N = max\{N_1, N_2\}$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq N$ berlaku $d(x_n, y_n) < d(x, y) + \varepsilon$ dan $d(x, y) < d(x_n, y_n) + \varepsilon$. Oleh karena itu berlaku $|d(x_n, y_n) - d(x, y)| < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq N$ maka dapat disimpulkan bahwa $\left(d(x_n, y_n)\right)$ konvergen ke $d(x, y)$. ∎

Berikut ini akan dijelaskan teorema mengenai barisan dari suatu himpunan tertutup yang konvergen ke suatu titik, maka titik limit tersebut adalah anggota dari himpunan tertutup.

Teorema 2.

Diberikan ruang metrik (X, d) dan A himpunan bagian tertutup dari X. Jika (a_n) konvergen ke x dan $a_n \in A$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $x \in A$.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa x titik limit A. Diketahui $\lim a_n = x$ dengan $a_n \in A$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Diambil sebarang $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli N sehingga berlaku $d(a_n, x) < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq N$ maka $a_n \in B(x, \varepsilon)$ untuk setiap $n \geq N$. Diperhatikan bahwa $B(x, \varepsilon) \cap A \backslash$

$\{x\} = a_n \backslash \{x\} \neq \emptyset$, sehingga hal ini disimpulkan bahwa x merupakan titik limit dari A. Karena A tertutup akibatnya $x \in A$. ■

Teorema 3.
Jika barisan (z_k) pada ruang metrik (X, d) dengan sifat $d(z_k, z_{k+1}) < \frac{1}{2^k}$ untuk setiap k, maka (z_k) barisan Cauchy.
Bukti:
Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat bilangan asli N sehingga $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$. Selanjutnya untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $n > m \geq N$ diperoleh

$$d(z_m, z_n) \leq d(z_m, z_{m+1}) + d(z_{m+1}, z_{n+2}) + \cdots + d(z_{n-1}, z_n)$$
$$< \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$
$$< \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon.$$

Sehingga terbukti bahwa (z_k) adalah barisan Cauchy. ■

Berikut ini akan diberikan beberapa definisi seperti jarak titik ke himpunan, jarak antara himpunan ke himpunan serta jarak Hausdorff.

Misal diberikan suatu ruang metrik (X, d). Didefinisikan $\mathcal{K}(X)$ merupakan koleksi himpunan bagian tak kosong dan kompak atau $\mathcal{K}(X) = \{A | A \subseteq X, A \neq \emptyset, A \text{ kompak}\}$. Selanjutnya $\mathcal{K}(X)$ cukup dituliskan dengan $\mathcal{K}$ saja.

Definisi 1.
Diketahui X ruang metrik, $x \in X$, dan $B \subseteq X$. Jarak dari titik x ke himpunan B dinotasikan $d(x, B)$ dan didefinisikan dengan

$$d(x, B) = \inf_{b \in B} d(x, b).$$

Definisi 2.
Diketahui X ruang metrik dan $A, B \subseteq X$. Jarak dari himpunan A ke B dinotasikan dengan $D(A, B)$ dan didefinisikan dengan

$$D(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B).$$

Definisi 3.
Diketahui X ruang metrik dan $A, B \subseteq X$. Jarak Hausdorff dari himpunan A dan B dinotasikan dengan $h(A, B)$ dan didefinisikan dengan

$$h(A, B) = max\{D(A, B), D(B, A)\} = max\left\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A)\right\}.$$

Berikut akan diberikan teorema yang membahas sifat-sifat yang berlaku pada jarak dari titik ke himpunan dan jarak antara himpunan-himpunan.
Teorema 4.
Diberikan untuk setiap $x \in X$ dan $A, B, C \in \mathcal{K}(X)$ maka berlaku
(1) $d(x, A) = 0$ jika dan hanya jika $x \in A$.
(2) $D(A, B) = 0$ jika dan hanya jika $A \subseteq B$.
(3) Jika terdapat $a_x \in A$ maka $d(x, A) = d(x, a_x)$.

(4) Jika terdapat $a^* \in A$ dan $b^* \in B$ maka $D(A,B) = d(a^*, b^*)$.
(5) Jika $A \subseteq B$ maka $d(x,B) \leq d(x,A)$.
(6) Jika $B \subseteq C$ maka $D(A,C) \leq D(A,B)$.
(7) $D(A \cup B, C) = max\{D(A,C), D(B,C)\}$.
(8) $D(A,B) \leq D(A,C) + (C,B)$.

Selanjutnya teorema berikut akan menjelaskan bahwa jarak Hausdorff pada Definisi 1. merupakan metrik Hausdorff, berikut teoremanya.

Teorema 5.

Diketahui X ruang metrik dan $\mathcal{K}(X) := \{A | A \subseteq X, A \neq \emptyset, A \text{ kompak}\}$. Jarak Hausdorff h dapat disebut metrik Hausdorff pada $\mathcal{K}$ jika memenuhi sifat-sifat berikut :
(1) $h(A,B) \geq 0$.
(2) $h(A,B) = 0 \leftrightarrow A = B$.
(3) $h(A,B) = h(B,A)$ (sifat simetri).
(4) $h(A,B) \leq h(A,C) + h(C,B)$ (ketaksamaan segitiga).

Definisi 4.

Ruang metrik Hausdorff adalah pasangan berurut $(\mathcal{K}, h)$ dengan $\mathcal{K}(X) := \{A | A \subseteq X, A \neq \emptyset, A \text{ kompak}\}$dan h metrik Hausdorff pada $\mathcal{K}$. Ruang metrik Hausdorff $(\mathcal{K}, h)$ cukup ditulis dengan $\mathcal{K}$ saja.

Diingat kembali bahwa definisi ruang metrik Hausdorff berkaitan dengan ruang metrik X yaitu, $\mathcal{K}(X) = \{A | A \subseteq X, A \neq \emptyset, A \text{ kompak}\}$. Berikut ini diberikan beberapa teorema $A \in \mathcal{K}(X)$ dengan X merupakan ruang metrik lengkap.

Pada teorema dibawah ini menjelaskan bahwa jika suatu himpunan pada ruang metrik Hausdorff ditambahkan dengan sebarang $\varepsilon > 0$ maka himpunan tersebut tertutup.

Teorema 6.

Untuk setiap $A \in \mathcal{K}$ dan $\varepsilon > 0$ berlaku $A + \varepsilon$ tertutup

Bukti:

Diketahui bahwa $A \in \mathcal{K}$ dan $\varepsilon > 0$. Diambil sebarang x titik limit dari $A + \varepsilon$, sehingga terdapat titik pada barisan (x_n) di $(A + \varepsilon) \backslash \{x\}$ yang konvergen ke x. Karena $x_n \in A + \varepsilon$, maka $d(x_n, A) \leq \varepsilon$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Pada Teorema 3.1.1. (3) menjamin bahwa untuk setiap n terdapat $a_n \in A$ sehingga $d(x_n, A) = d(x_n, a_n)$. Oleh karena itu $d(x_n, a_n) \leq \varepsilon$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Diperhatikan karena himpunan A kompak maka diperoleh A kompak sekuensial sehingga untuk setiap barisan (a_n) mempunyai barisan bagian $\left(a_{n_k}\right)$ yang konvergen ke suatu titik, misalkan $a \in A$. Karena (x_n) konvergen ke x, sehingga untuk sebarang barisan bagian $\left(x_{n_k}\right) \subseteq (x_n)$ konvergen ke x. Sehingga diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} d\left(x_{n_k}, a_{n_k}\right) = d(x,a).$$

Perhatikan, karena $\left(x_{n_k}\right)$ dan $\left(a_{n_k}\right)$ adalah barisan bagian dari (x_n) dan (a_n), sehingga berlaku

$$d\left(x_{n_k}, a_{n_k}\right) \leq \varepsilon \text{ untuk setiap } k \in \mathbb{N}.$$

maka diperoleh,

$$d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a) \leq d(x,a) \leq \varepsilon. \qquad (1.)$$

Dari pernyataan (1.) diperoleh $d(x, A) \leq \varepsilon$, sehingga $x \in A + \varepsilon$. Karena x adalah sebarang titik limit, maka $A + \varepsilon$ adalah himpunan tertutup. ■

Teorema 7.
Diketahui $A, B \in \mathcal{K}$. Untuk $\varepsilon > 0$ sebarang berlaku $h(A, B) \leq \varepsilon$ jika dan hanya jika $A \subseteq B + \varepsilon$ dan $B \subseteq A + \varepsilon$.
Bukti:
($\rightarrow$)Diketahui $h(A, B) \leq \varepsilon$ untuk $\varepsilon > 0$ sebarang. Diperhatikan bahwa

$$D(A, B) \leq h(A, B) = max\{D(A, B), D(B, A)\} \leq \varepsilon.$$

Diambil sebarang $a \in A$ maka berlaku $d(a, B) \leq D(A, B) \leq \varepsilon$. Karena $d(a, B) \leq \varepsilon$ maka $a \in B + \varepsilon$ artinya diperoleh bahwa $A \subseteq B + \varepsilon$.
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $B \subseteq A + \varepsilon$. Dengan cara yang sama diambil $\varepsilon > 0$ sebarang, maka berlaku

$$D(B, A) \leq h(A, B) = max\{D(A, B), D(B, A)\} \leq \varepsilon.$$

Diambil sebarang $b \in B$ maka berlaku $d(b, A) \leq D(B, A) \leq \varepsilon$. Karena $d(b, A) \leq \varepsilon$ maka $b \in A + \varepsilon$ artinya diperoleh bahwa $B \subseteq A + \varepsilon$.
($\leftarrow$) Berdasarkan sifat simetri berlaku $h(A, B) \leq \varepsilon$ bila $A \subseteq B + \varepsilon$ dan $B \subseteq A + \varepsilon$. ■

Sebelum dijelaskan mengenai kekonvergenan barisan himpunan, berikut akan diberikan mengenai barisan himpunan.

Definisi 5.
Diberikan $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$, dan $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \text{ untuk suatu } n_0 \in \mathbb{N}\}$. Barisan himpunan bagian X adalah suatu fungsi $f: A \rightarrow P(X)$, dimana $P(X)$ himpunan kuasa pada X . Untuk setiap $n \in A$ dapat ditulis

$$A_n = f(n)$$

dan disebut himpunan bagian dari X atau $A_n \subseteq X$.

Berikut akan dijelaskan definisi mengenai kekonvergenan dan barisan Cauchy pada ruang metrik Hausdorff.

Definisi 6.
Diberikan (A_n) barisan himpunan bagian tertutup dari X dan A himpunan bagian tertutup dari X. Barisan A_n konvergen ke A jika $\lim_{n\rightarrow\infty} h(A_n, A) = 0$ atau dapat dinotasikan $A_n \xrightarrow{h} A$.

Definisi 7.
Suatu barisan himpunan bagian tertutup yang tak kosong dikatakan barisan Cauchy di $(\mathcal{K}, h)$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga berlaku

$$h(A_n, A_m) < \varepsilon \text{ untuk setiap } n, m \geq N.$$

Pada teorema berikut membahas tentang kriteria yang berlaku pada barisan Cauchy pada ruang metrik Hausdorff $\mathcal{K}$.

Teorema 8.

Diberikan suatu barisan Cauchy $(A_n) \subseteq \mathcal{K}$. Jika $\left(x_{n_k}\right)$ barisan Cauchy di X dengan $x_{n_k} \in A_{n_k}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka terdapat barisan Cauchy (y_n) di X sehingga berlaku $y_n \in A_n$ dan $y_{n_k} = x_{n_k}$ dengan $k \in \mathbb{N}$.
Bukti:
Diketahui $\left(x_{n_k}\right)$ barisan Cauchy di X dengan $x_{n_k} \in A_{n_k}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Didefinisikan $n_0 = 0$ dan untuk setiap n yang memenuhi $n_{k-1} < n \leq n_k$, dengan Teorema 3.1.1. (3) dapat diambil $y_n \in A_n$ sehingga berlaku $d\left(x_{n_k}, A_n\right) = d\left(x_{n_k}, y_n\right)$. Selanjutnya

$$d\left(x_{n_k}, y_n\right) = d\left(x_{n_k}, A_n\right) \leq D\left(A_{n_k}, A_n\right) \leq h\left(A_{n_k}, A_n\right).$$

Perhatikan, karena $\left(y_{n_k}\right) \subseteq (y_n)$ diperoleh $d\left(x_{n_k}, y_{n_k}\right) = d\left(x_{n_k}, y_n\right) = 0$. Karena $\left(A_{n_k}\right) \subseteq (A_n)$ maka $d\left(x_{n_k}, A_{n_k}\right) = d\left(x_{n_k}, A_n\right) = d\left(x_{n_k}, y_n\right) = d\left(x_{n_k}, y_{n_k}\right) = 0$. Sedemikian sehingga $y_{n_k} = x_{n_k}$ dengan $k \in \mathbb{N}$. Misalkan diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $\left(x_{n_k}\right)$ barisan Cauchy di X maka terdapat bilangan asli $M > 0$ sehingga $d\left(x_{n_k}, x_{n_j}\right) < \frac{\varepsilon}{3}$ untuk setiap $k, j \geq M$. Diketahui barisan Cauchy $(A_n) \subseteq \mathcal{K}$, maka terdapat bilangan asli $N \geq n_k$ maka berlaku $h(A_m, A_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ untuk setiap $m, n \geq N$. Andai $m, n \geq N$ maka terdapat $k, j \geq M$ sehingga $n_{k-1} < m \leq n_k$ dan $n_{j-1} < n \leq n_j$. Sedemikian sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &\leq d\left(y_m, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_k}, x_{n_j}\right) + d\left(x_{n_j}, y_n\right) \\ &\leq h\left(A_{n_k}, A_n\right) + d\left(x_{n_k}, x_{n_j}\right) + h\left(A_{n_j}, A_m\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Oleh karena itu disimpulkan (y_n) barisan Cauchy di X sehingga $y_n \in A$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $y_{n_k} = x_{n_k}$ dengan $k \in \mathbb{N}$. ■

Teorema berikut menjelaskan bahwa suatu himpunan titik limit dari barisan Cauchy pada ruang metrik Hausdorff bersifat tertutup dan bukan himpunan kosong.

Teorema 9.
Misal diberikan suatu barisan $(A_n) \subseteq \mathcal{K}$ dan misalkan himpunan $A := \{x \in X | \exists (x_n) \subseteq A_n, x_n \to x\}$. Jika (A_n) barisan Cauchy, maka himpunan A tertutup dan bukan himpunan kosong.
Bukti:

(i) Akan dibuktikan bahwa A bukan himpunan kosong. Karena (A_n) barisan Cauchy maka terdapat $n_1 \in \mathbb{N}$ sehingga $h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ untuk setiap $m, n \geq n_1$. Dengan cara yang sama maka terdapat bilangan bulat $n_2 > n_1$ sehingga $h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ untuk setiap $m, n \geq n_2$. Proses yang sama dilanjutkan dan diperoleh barisan (n_k) sehingga $h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^k}$ untuk setiap $m, n \geq n_k$. Misalkan $x_{n_1} \in A_{n_1}$. Berdasarkan Teorema 4. (3) diambil $x_{n_2} \in A_{n_2}$ sehingga $d\left(x_{n_1}, x_{n_2}\right) = d\left(x_{n_1}, A_{n_2}\right)$ maka diperoleh

$$d\left(x_{n_1}, x_{n_2}\right) = d\left(x_{n_1}, A_{n_2}\right) \leq h\left(A_{n_1}, A_{n_2}\right) < \frac{1}{2}.$$

Dengan cara yang sama dapat diambil $x_{n_3} \in A_{n_3}$ sehingga

$$d\left(x_{n_2}, x_{n_3}\right) = d\left(x_{n_2}, A_{n_3}\right) \leq h\left(A_{n_2}, A_{n_3}\right) < \frac{1}{4}.$$

Proses yang sama dilanjutkan dan diperoleh $x_{n_k} \in A_{n_k}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ sehingga

$$d\left(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}\right) = d\left(x_{n_k}, A_{n_{k+1}}\right) \leq h\left(A_{n_k}, A_{n_{k+1}}\right) < \frac{1}{2^k}.$$

Karena $d\left(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}\right) < \frac{1}{2^k}$ maka $\left(x_{n_k}\right)$ adalah barisan Cauchy. Oleh karena $\left(x_{n_k}\right)$ barisan Cauchy dan $x_{n_k} \in A_{n_k}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ maka berdasarkan Teorema 8. terdapat barisan Cauchy (y_n) di X sehingga $y_n \in A_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $y_{n_k} = x_{n_k}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Karena X lengkap, maka barisan Cauchy (y_n) konvergen ke titik $y \in X$. Karena $y_n \in A_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $y \in A$. Sehingga diperoleh A bukan himpunan kosong.

(ii) Selanjutnya akan dibuktikan himpunan A tertutup. Misalkan a titik limit dari A. Maka terdapat barisan $a_k \in A \backslash \{a\}$ yang konvergen ke a. Karena untuk setiap $a_k \in A$, maka terdapat barisan (y_n) sehingga (y_n) konvergen ke a_k dan $y_n \in A_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Akibatnya terdapat n_1 sehingga $x_{n_1} \in A_{n_1}$ dan $d\left(x_{n_1}, a_1\right) < 1$. Dengan cara yang sama terdapat $n_2 > n_1$ dan titik $x_{n_2} \in A_{n_2}$ sehingga $d\left(x_{n_2}, a_2\right) < \frac{1}{2}$. Proses yang sama dilanjutkan dan diperoleh barisan (n_k) sedemikian sehingga $d\left(x_{n_k}, a_k\right) < \frac{1}{k}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Sehingga diperoleh

$$d\left(x_{n_k}, a\right) \leq d\left(x_{n_k}, a_k\right) + d(a_k, a).$$

Perhatikan untuk $d\left(x_{n_k}, a_k\right) < \frac{1}{k}$ artinya $d\left(x_{n_k}, a_k\right)$ mendekati nol, sehingga $\left(x_{n_k}\right)$ konvergen ke (a_k) dan karena (a_k) konvergen ke a, maka $\left(x_{n_k}\right)$ konvergen ke a. Karena setiap barisan konvergen adalah Cauchy maka untuk $\left(x_{n_k}\right)$ konvergen ke a juga barisan Cauchy dengan $x_{n_k} \in A_{n_k}$. Teorema 8. menjamin bahwa terdapat (y_n) barisan Cauchy di X sehingga $y_n \in A$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $y_{n_k} = x_{n_k}$. Oleh karena itu $a \in A$ sehingga diperoleh A tertutup. ■

Teorema 10.
Diberikan barisan (A_n) yang terbatas total di X dan A sebarang himpunan bagian X. Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli N sehingga berlaku $A \subseteq A_N + \varepsilon$ maka himpunan A terbatas total.
Bukti:
Diambil sebarang $\varepsilon > 0$, dipilih bilangan asli N sehingga $A \subseteq A_N + \frac{\varepsilon}{4}$,. Karena (A_n) terbatas total maka terdapat himpunan berhingga $\{x_i : 1 \leq i \leq q\}$ dimana $x_i \in A_N$ sedemikian sehingga diperoleh $A_N \subseteq \bigcup_{i=1}^{q} B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{4}\right)$. Berdasarkan pengurutan kembali *(reordering)* x_i diasumsikan bahwa,

$B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A \neq \emptyset$ untuk setiap $1 \leq i \leq p$

dan

$B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A = \emptyset$ untuk $p < i$.

Misalkan $y_i \in B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A$ untuk setiap $1 \leq i \leq p$ dan $a \in A$. Karena $A \subseteq A_N + \frac{\varepsilon}{4}$ maka $a \in A_N + \frac{\varepsilon}{4}$, sehingga $d(a, A_N) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Berdasarkan Teorema 4. (3) maka terdapat $x \in A_N$ sedemikian sehingga $d(a, x) = d(a, A_N) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ dan karena $x_i \in A_N$ maka $d(x, x_i) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Selanjutnya diperoleh bahwa

$$d(a, x_i) \leq d(a, x) + d(x, x_i) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Oleh karena $y_i \in B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A$ untuk setiap $1 \leq i \leq p$ sehingga $d(x_i, y_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Selanjutnya diperoleh

$$d(a, y_i) \leq d(a, x_i) + d(x_i, y_i) < \varepsilon.$$

Oleh karena itu untuk setiap $a \in A$ maka terdapat himpunan berhingga y_i untuk setiap $1 \leq i \leq p$ sedemikian sehingga $a \in B(y_i, \varepsilon)$, sehingga berlaku

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} B(y_i, \varepsilon).$$

Artinya diperoleh A terbatas total. ■

Mereview kembali bahwasanya ruang metrik Hausdorff $\mathcal{K}$ terbentuk pada ruang metrik X. Teorema berikut ini akan menjelaskan hubungan $\mathcal{K}$ dengan X, jika X-nya lengkap.

Teorema 11.
Jika ruang metrik (X, d) lengkap maka ruang metrik Hausdorff $(\mathcal{K}, h)$ lengkap.
Bukti:
Diambil sebarang (A_n) barisan Cauchy di $\mathcal{K}$ dan didefinisikan $A := \{x \in X | \exists (x_n) \subseteq (A_n), x_n \to x\}$. Untuk membuktikan ruang metrik Hausdorff lengkap maka akan dibuktikan $A \in \mathcal{K}$ dan (A_n) konvergen ke A.

(i) Berdasarkan Teorema 9. himpunan $A \neq \emptyset$ dan tertutup. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli N sehingga diperoleh $h(A_n, A_m) < \varepsilon$ untuk setiap $m, n \geq N$. Karena $h(A_n, A_m) < \varepsilon$ maka berlaku $A_m \subseteq A_n + \varepsilon$ untuk setiap $m > n \geq N$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $a \in A_n + \varepsilon$ untuk $n \geq N$. Misalkan $a \in A$, sehingga berdasarkan definisi himpunan A maka terdapat barisan (x_n) dimana $x_n \in A_n$ dengan $n \in \mathbb{N}$ dan x_n konvergen ke a. Berdasarkan Teorema 6. berlaku $A_n + \varepsilon$ tertutup. Karena $x_n \in A_n + \varepsilon$ maka berlaku $a \in A_n + \varepsilon$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Lebih lanjut akan dibuktikan bahwa $A \subseteq A_n + \varepsilon$. Sedemikian sehingga himpunan A terbatas total. Karena A lengkap dan terbatas total, maka A kompak, akibatnya $A \in \mathcal{K}$.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa $A_n \xrightarrow{h} A$, yaitu jika diambil sebarang $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli N sehingga berlaku
$h(A, A_n) < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq N$.

Untuk membuktikan pernyataan 3.27. maka akan dibuktikan terlebih dahulu dua kondisi berikut, yaitu:

1. $A \subseteq A_n + \varepsilon$
2. $A_n \subseteq A + \varepsilon$.

Perhatikan untuk kondisi pertama, pada cara nomer (i) telah dibuktikan bahwa $a \in A_n + \varepsilon$ dengan $a \in A$, artinya bahwa $A \subseteq A_n + \varepsilon$. Untuk membuktikan kondisi kedua, diambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Karena (A_n) barisan Cauchy maka terdapat bilangan asli N sehingga berlaku $h(A_m, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $m, n \geq N$. Selanjutnya karena (A_n) barisan Cauchy di $\mathcal{K}$, diambil $\varepsilon > 0$ sebarang maka terdapat (n_i) barisan naik tegas untuk setiap bilangan asli $n_i \geq N$ sehingga berlaku $h(A_m, A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ untuk setiap $m, n \geq n_i$. Selanjutnya dengan Teorema 3.1.1. (3) diperoleh sebagai berikut:

untuk $A_n \subseteq A_{n_1} + \frac{\varepsilon}{2}$ maka terdapat $x_{n_1} \in A_{n_1}$ sehingga berlaku $d(y, x_{n_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$
untuk $A_{n_1} \subseteq A_{n_2} + \frac{\varepsilon}{4}$ maka terdapat $x_{n_2} \in A_{n_2}$ sehingga berlaku $d(x_{n_1}, x_{n_2}) \leq \frac{\varepsilon}{4}$
untuk $A_{n_2} \subseteq A_{n_3} + \frac{\varepsilon}{8}$ maka terdapat $x_{n_3} \in A_{n_3}$ sehingga berlaku $d(x_{n_2}, x_{n_3}) \leq \frac{\varepsilon}{8}$
$\vdots$
untuk $A_{n_i} \subseteq A_{n_{i+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ maka terdapat $x_{n_i} \in A_{n_i}$ sehingga berlaku $= d(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$.

Diperoleh (x_{n_i}) barisan Cauchy. Kemudian perhatikan Teorema 8. bahwa telah ditunjukkan (x_{n_i}) konvergen ke a, dan $a \in A$. Selanjutnya perhatikan untuk
$d(y, x_{n_i}) \leq d(y, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, x_{n_2}) + d(x_{n_2}, x_{n_3}) + \cdots + d(x_{n_i}, x_{n_{i+1}})$
$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} < \varepsilon.$
Karena y konvergen ke x_{n_i} untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ maka $d(y, a) < \varepsilon$ sehingga $y \in A + \varepsilon$. Oleh karena $y \in A_n$ maka $A_n \subseteq A + \varepsilon$. Dari pernyataan (1) dan (2) jika diambil $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga berlaku $h(A_n, A) \leq \varepsilon$ untuk setiap $n \geq N$ artinya $A_n \xrightarrow{h} A$.
Dari pembuktian (i) dan (ii) karena (X, d) lengkap maka $(\mathcal{K}, h)$ lengkap. ■

Teorema 12.
Jika ruang metrik (X, d) kompak maka ruang metrik Hausdorff $(\mathcal{K}, h)$ kompak.
Bukti:
Akan dibuktikan bahwa $\mathcal{K}$ kompak, yaitu dengan konsep yang sama pada ruang metrik X maka akan ditunjukkan $\mathcal{K}$ lengkap dan terbatas total.

(i) Akan dibuktikan bahwa $\mathcal{K}$ lengkap. Berdasarkan teorema sebelumnya telah dibuktikan bahwa $\mathcal{K}$ lengkap.
(ii) Akan dibuktikan bahwa $\mathcal{K}$ terbatas total. Berdasarkan Teorema 10. jika barisan (A_n) yang terbatas total di X akibatnya X juga terbatas total. Diambil $\varepsilon > 0$ sebarang maka terdapat himpunan berhingga $\{x_i \in X : 1 \leq i \leq n\}$ sehingga $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{3}\right)$. Didefinisikan $\{C_k \in X : 1 \leq k \leq 2^p - 1, p \in \mathbb{N}\}$ koleksi gabungan tak kosong dari penutup bola. Sebab X kompak maka penutup kompak. Karena untuk setiap C_k terdiri dari gabungan bola berhingga yang kompak maka C_k kompak, artinya $C_k \in \mathcal{K}$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\mathcal{K} \subseteq \bigcup_{k=1}^{2^p-1} B_h(C_k, \varepsilon)$. Diambil $Z \in \mathcal{K}$, maka akan ditunjukkan terlebih dahulu $Z \in B_h(C_k, \varepsilon)$ untuk suatu k. Selanjutnya diambil
$$S_z \coloneqq \{i : Z \cap \overline{B(x_\iota, \varepsilon)} \neq \emptyset\}.$$
kemudian dipilih indeks j sehingga
$$C_j = \bigcup_{i \in S_z} \overline{B\left(x_\iota, \frac{\varepsilon}{3}\right)}.$$

Karena $Z \subseteq C_j$, maka diperoleh $D(Z, C_j) = 0$. Misalkan $c \in C_j$, maka terdapat $i \in S_z$ dan $z \in Z$ sehingga berlaku $c, z \in \overline{B\left(x_\iota, \frac{\varepsilon}{3}\right)}$. Akibatnya berdasarkan Teorema 4. (3) diperoleh $d(c, Z) \leq \frac{2}{3}\varepsilon$. Karena dipilih sebarang c maka diperoleh $D(C_j, Z) \leq \frac{2}{3}\varepsilon$. Selanjutnya diperoleh metrik Hausdorff $h(Z, C_j) = D(C_j, Z) < \varepsilon$. Sehingga berlaku $Z \in B_h(C_j, \varepsilon)$ akibatnya $\mathcal{K}$ terbatas total. Dari pernyataan (i) dan (ii) karena $\mathcal{K}$ lengkap dan terbatas total maka $\mathcal{K}$ kompak. Jadi disimpulkan bahwa ketika ruang metrik X kompak maka $\mathcal{K}$ kompak. ■

SIMPULAN & SARAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan dapat ditarik beberapa kesimpulan berikut ini, ruang metrik Hausdorff adalah pasangan berurut $(\mathcal{K}, h)$ dengan $\mathcal{K}(X) \coloneqq \{A|A \subseteq X, A \neq \emptyset, A \text{ kompak}\}$ dan h metrik Hausdorff pada $\mathcal{K}$, ruang metrik Hausdorff $\mathcal{K}$ lengkap jika ruang metrik X lengkap, serta ruang metrik Hausdorff $\mathcal{K}$ kompak jika ruang metrik X kompak. Penelitian ini dapat dikembangkan lagi dengan membuktikan kekompakan lokal *(locally compact)* jika (X, d) kompak lokal maka $(\mathcal{K}, h)$ kompak lokal.

DAFTAR RUJUKAN

Barich, K. (2011). *Proving Completeness of The Hausdorff Induced Metric Space*. Research Article: Whitman College. Diambil pada tanggal 7 Maret 2018, dari *https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics.*

Gelutu, A. (2006). *Introduction to Topological Spaces and Set-Valued Maps (Lecture Notes)*. German: Ilmenau University of Technology.

Tasković, M. R. (2005). Fréchet's Metric Space-100th Next. *Mathematica Moravica*, 69-75.